共立講座　21世紀の数学

22

ディラック作用素の指数定理

吉田　朋好・著

共立出版株式会社

刊行にあたって

基礎科学としての数学の重要性は近年ますます増えている．にもかかわらず理工系離れがすすんでいる．その根底には数学離れがある．高等学校の数学教育も新課程に移行し，大学における数学教育も多様化しつつある．

このような状況において渇望されているのは，多様なニーズにこたえる個性的な教科書である．われわれは，現在の数学体系を大胆に再構成した大学の教科書を模索した．旧来の理学部数学科が変貌しつつある現在，有機的なつながりのなかでこそ，多面的な理解や多様な目的にあわせた自由な選択が可能になると信ずる．

きたるべき時代 21 世紀へ向けて，この新しい構成の教科書「共立講座 21 世紀の数学」を世に問う．

編集委員

まえがき

現代数学のほとんどの分野は多様体上でのある特殊な構造を研究しているといえる．それぞれの分野で，特徴のある多様体上の特徴のある構造，あるいは関数を考察しているわけであるが，そういった特殊な構造の枠を越えて一般的に成り立ついわばユニバーサルな性格をもった定理のひとつが指数定理である．

指数定理（index theorem）とは，多様体上の楕円型線形偏微分作用素の指数（index）とよばれる解析的不変量を，特性類（characteristic class）を用いて定義される位相幾何学的不変量の言葉で記述するものである．

指数定理は 1963 年にアティヤ・シンガー（Atiyah-Singer）により発表され，通常アティヤ・シンガー指数定理（Atiyah-Singer Index Theorem）と称される．このときの証明は擬微分作用素（pseudo-differential operator）の理論と，K 理論やコボルディズム理論（cobordism theory）など，当時までに開発された代数的位相幾何学の手段を本質的に用いる大がかりなものであった．それは当時も"超大域的数学"といわれたように，固定した多様体ではなく多様体全体のなすカテゴリーに話を広げて議論を進めることに特徴があった．

しかしその高度に抽象性の高い証明の裏には，ディラック作用素（Dirac operator）とよばれるきわめて基本的な 1 階偏微分作用素についての具体的な計算の積み重ねがあり，またディラック作用素がある意味ですべての楕円型偏微分作用素のいわば生成元のような位置を占めている，という認識がアティヤ・シンガーを成功に導いたのであった．

ディラック作用素とはその名から察せられるとおり，物理学者のディラック（Dirac）に端を発するものである．

数学で歴史的にもっともよく研究された楕円型偏微分作用素は，ラプラシアンとよばれる2階偏微分作用素である．ラプラシアンは定常状態を記述する作用素で数理物理学の中心的テーマになっている．

ディラック作用素とは一言でいえばラプラシアンの平方根である．このようなものを考えるに至った動機は，古典量子力学におけるシュレーディンガー（Schrödinger）作用素が，時間変数に関して1階，空間変数に関して2階の微分を含んでいるため，時間，空間を同等に扱う特殊相対性理論とうまく合わず，いわゆる電子の相対論的量子力学をつくるためには，4次元ミンコフスキー空間での2階偏微分作用素であるダランベルシアン（不定計量でのラプラシアン）の平方根にあたる1階偏微分作用素をつくらなければならなかったことにある．

ダランベルシアンは時間，空間4変数の2階微分を含むスカラー（数）係数の微分作用素で，一見してわかるようにその平方根にあたるスカラー係数微分作用素は存在しない．ディラックの天才は微分作用素の係数をスカラーではなく行列に取れば平方根にあたるものをつくることができることに気づいたことにある．

方程式の係数をスカラーから行列にするのは，単独の方程式から連立の方程式系に移行することにほかならないが，ディラックの方程式の本質的に重要な側面は，単に方程式系に移るにとどまらず，係数行列がある代数を生成することにあった．ディラックの与えた微分作用素の係数は4つの4行4列の行列であるが，その係数行列から行列の積と和により1つの代数が構成される．この代数がスピノル群とよばれるリー群を含み，これによってディラックは電子のもつスピンという物理的属性を方程式の中に自然に取り込むことができた．これはその後の数学でクリフォード代数（Clifford algebra）とよばれるものの例になっている．

アティヤとシンガーは，4次元ミンコフスキー空間でディラックが与えた微分作用素を，正定値計量をもつ一般次元のリーマン多様体上の1階偏微分作用素に拡張した．これが本書の主題であるディラック作用素である．正定値計量をもつn次元ユークリッド空間に対しクリフォード代数を構成し，n次元リーマン多様体の各点での接空間をリーマン計量によりユークリッド空間と見なしてクリフォード代数を付随させ，それらを係数とする1階偏微分作用素を構成したのである．

このような一般的な枠組みでリーマン多様体上に定義されたディラック作用素は，実はそれ以前に幾何学の種々の分野で知られていた代表的な微分作用素を例として含んでいる．実際，幾何学的な起源をもつほとんどの1階線形微分作用素

はディラック作用素になっていることがわかる．それは幾何学において基本的な重要性をもち，少し挙げただけでも，ホッジ理論（Hodge theory），ゲージ理論，幾何学的量子化などのさまざまな局面に現れる．

ラプラシアンとディラック作用素の関係は，複素平面上の (-1) と i を掛ける作用素の関係に類似している．複素平面は実軸 $\mathbf{R}$ と虚軸 $i\mathbf{R}$ の直和であり，(-1) はこれらを保つが i はこれらを互いに入れ替える．一般に多様体上の幾何学的に構成されたベクトルバンドルの切断全体からなる無限次元線形空間は，多様体のもつポアンカレ双対性（Poincaré duality）から，自然に “半分次元部分空間” ともいうべき 2 つの空間の直和に分かれる．ディラック作用素はこれらを互いに入れ替え，その 2 乗であるラプラシアンはこれらを保つ．

この意味でラプラシアンは実の作用素であり，ディラック作用素は複素作用素ということができる．そしてディラック作用素が本質的に複素作用素の性格をもつことが，ディラック作用素にきわめて豊かな内容をもたらすことになる．このことはとくにゲージ理論，幾何学的量子化などで顕著にみられることである．

アティヤ・シンガーの一般の楕円型作用素の指数に関する上記位相幾何学的な枠組みによる基本的な仕事の後，アティヤ・ボット・パトゥディ（Atiyah-Bott-Patodi）は楕円型作用素の熱核の漸近展開に基礎をおいたまったく異なる原理からの “指数定理” の証明を提出した．その後，熱核によるこの証明は，ディラック作用素の特別な場合に限って “指数定理” をさらに精密化した “局所指数定理” に発展させられた．

本書の目標はこの “局所指数定理（local index theorem）” の証明を紹介することにある．

全体の証明の枠組みはキュレン（Quillen）の哲学,「ディラック作用素は接続の理論の量子化である」という原理によっている．

クリフォード代数とはベクトル空間から構成される外積代数に，ベクトル空間の内積によって定義される縮約作用素を組み込んでつくられる代数である．それは素粒子物理学でいわゆるフェルミオン粒子の生成消滅作用全体のなす代数を，数学的に定式化したものである．ベクトル空間の内積の大きさを変化させて，内積を 0 に退化させれば，縮約作用素は消えてクリフォード代数は外積代数に退化する．内積の大きさをあたかもプランク定数（Planck constant）のように見なせば，クリフォード代数の古典力学極限が外積代数であるという見方ができ，これをク

リフォード代数は外積代数の量子化であると表現する．

多様体上のベクトルバンドルに接続が与えられると，多様体上のベクトルバンドルに値をもつ微分形式の空間に共変微分作用素が定義される．この作用素の2乗は曲率による掛け算作用素になる．ベクトルバンドルの構造群であるリー群のリー環上の不変式と組み合わせて，これからベクトルバンドルの特性類という位相幾何学的不変量が得られる．これをチャーン・ヴェイユ（Chern-Weil）理論とよぶ．

外積代数を量子化したクリフォード代数を用いて同様の構成を行うと，ベクトルバンドルの接続から，クリフォード加群に値をもつ多様体上の微分形式の空間に1階偏微分作用素が定義され，これがディラック作用素である．ディラック作用素の2乗はラプラシアンを与え，その熱核（heat kernel）が構成され，その超トレース（super trace）は対応する接続のチャーン指標の量子化になっている．この観点からディラック作用素の指数定理は，ディラック作用素の2乗の熱核と，対応する接続のチャーン指標の間の関係に関する定理である．この関係はコホモロジーではなく微分形式のレベルで成り立ち，指数理論と熱核をチャーン・ヴェイユ理論の量子化と考えることに導く．

外積代数　（量子化）$\Longrightarrow$ クリフォード代数

チャーン・ヴェイユ理論　（量子化）$\Longrightarrow$ 指数理論

局所指数定理の証明のおもな手段は，ディラック作用素の2乗の熱核の幾何学的な構成である．熱核の重要性はそれが$t=0$のときの恒等作用素と，$t=\infty$のときのディラック作用素の核への射影の間をつなぐ作用素を定義することである．熱核とくにその対角集合への制限を調べることが，ディラック作用素の核を理解することにとどまらず，それ自身重要性をもつ．

指数定理の証明は多くの人々によって簡略化の努力がなされてきた．とくに理論物理との関連からの新しい見方によって見通しがよくなった面はあるが，証明の全体は決して簡単にはなってはいない．そのために初学者は，ときに全体として何をやっているのかわからなくなってしまう危険性がおおいにありうる．そこで第1章に指数定理の概略と証明の基本的な考え方のあらましを書いた．この章はお話風になっており，数学的な厳密さは犠牲にしてある．本書の本格的な部分は第2章以後であり，第1章は独立している．

目　　次

1

作用素の指数

*この章はディラック作用素を含む多様体上の***楕円型線形偏微分作用素** *(elliptic partial differential operator) の指数の概論である．指数の概念についておおざっぱな感覚をとらえてもらうためのもので，個々の事柄の詳しい説明と証明は省略してある．1.1，1.2 節に述べる内容はずっと一般的な設定のもとに第 2 章以降に詳しく解説される．1.3 節の内容はおもにアティヤ・シンガーの最初の証明に沿ったもので第 2 章以降には触れられない．*

1.1　曲面上のベクトル場

一般的に楕円型線形偏微分方程式 $D\psi = 0$ の解は “定常状態” とよばれる時間的に変化しないエネルギー極小の状態を表すものである．ここで ψ は多様体上のベクトルバンドルの切断なのだが，こういったものを考えることが幾何学の種々の面で起こり，とくに空間の大域的性格であるトポロジーと深く関連している．この節で「楕円型偏微分作用素の指数」なるものが幾何学にどのように現れるのかひとつの例をあげてみてみよう．

S をリーマン計量 g_{ij} を与えられた向きづけられた閉曲面とする．S 上に微分可能な接**ベクトル場** (vector field) X を考える．

S 上の 2 つの接ベクトル場 X，Y と，任意の実数 λ, μ に対する一次結合 $\lambda X + \mu Y$ はまた，S 上の接ベクトル場になる．こうして S 上の微分可能な接ベクトル場全体の集合 $V(S)$ は実数体上の線形空間となるが，これはもちろん無限次元の線形空間である．

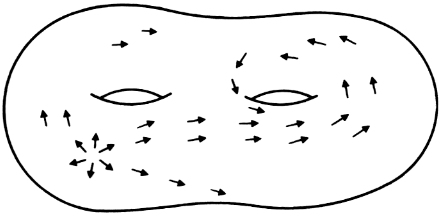


図 1

$V(S)$ の中には次の仕方で自然に考えられる2つの部分空間 $Im\,G$, $Im\,G^*$ がある.

まず $Im\,G$ から始める. S 上の微分可能な関数 f に対し S のリーマン計量 g_{ij} に関する f の**勾配ベクトル場** (gradient vector field) $grad\,f$ が, $(g_{ij})^{-1} = (g^{ij})$ として, 局所座標 $\{x_1, x_2\}$ を用いて

$$grad\,f = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.1}$$

と定義される. ただし, 上式の右辺で重複する添字については $\{1,2\}$ にわたる和をとることにする (**アインシュタイン** (Einstein) **の規約**).

$grad\,f$ は関数 f がもっとも効率よく増大する方向とその増大度を表すベクトル場である. これは f=定数の場合を除き恒等的に零でない S 上の接ベクトル場である.

S 上の微分可能な実数値関数全体の集合 $C^\infty(S)$ はやはり実数体上の無限次元の線形空間であるが, $f \to grad\,f$ という対応によって線形写像

$$G : C^\infty(S) \longrightarrow V(S) \tag{1.2}$$

が得られる. この像を $Im\,G$ で表す. $Im\,G$ は $V(S)$ の無限次元線形部分空間である.

$Im\,G$ は $V(S)$ の中でどれほどの部分を占めているのだろうか?

コンパクト空間 S 上の微分可能な実数値関数 f は必ず最大値と最小値をもつ. かりに f の最大, 最小値がもし孤立点であれば, その近くでは $grad\,f$ はそれぞれ図2のような様子になっていることは理解されるであろう.

図2のような点をそれぞれベクトル場の吸い込み点, 湧き出し点とよぶ. 一般の関数 f に対し f の最大, 最小値の近くで $grad\,f$ が必ず図2のようになっている

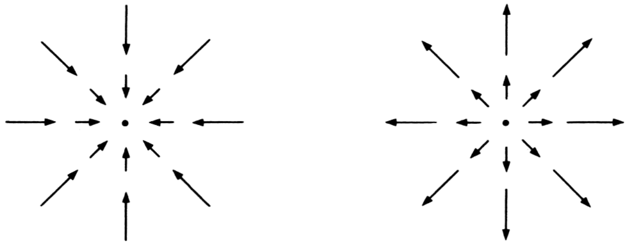


図 2

とは限らないが，“大部分” の関数に対してはそうなっていると見なしてさしつかえない．つまり吸い込み点，湧き出し点をもつのは $grad\,f$ と書かれるベクトル場のひとつの特徴と考えてよい．

そこで吸い込み点，湧き出し点をまったくもたないベクトル場があれば，それは $Im\,G$ には属さないベクトル場である可能性が高い．そのようなベクトル場はあるのだろうか．

$grad\,f$ に対し，各点で $grad\,f$ を S の向きに沿った方向に $90°$ 回転したベクトル場 $grad^*f$ を考える．このとき f の最大，最小値での $grad\,f$ の吸い込み，湧き出しは $grad^*f$ では渦の状態になる（図 3）．したがってベクトル場 $grad^*f$ は渦の状態を必ずもつと思ってよいのだが，さらに $grad^*f$ は吸い込み点も湧き出し点もまったくもたないことがわかり，これらは $grad^*f$ を特徴づける性格になる．$f \to grad^*f$ の対応を

$$G^* : C^\infty(S) \longrightarrow V(S) \tag{1.3}$$

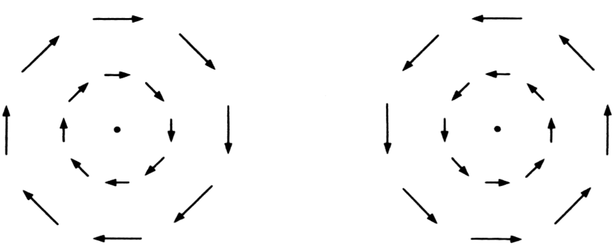


図 3

と書けば，これも線形写像であり，その像 $Im\,G^*$ は $V(S)$ の無限次元線形部分空間である．

さて吸い込み点，湧き出し点といういく分直感的な言葉を使ったが，もう少しきちんとした表現を与えよう．

S 上の接ベクトル場 $X = \xi_j \partial_j$ に対し X の**発散**（divergence）とよばれる S 上の関数 $div\,X$ を

$$div\,X = -\sum \left(\partial_j \xi_j + \frac{1}{2} \xi_j \partial_j \log(\det(g_{ij})) \right) \tag{1.4}$$

で定義する．また接ベクトル場 X を S の各点で S の向きに沿って 90° 回転して得られる接ベクトル場を X^* とし，

$$div^* X = div\,X^* \tag{1.5}$$

とおく．$div\,X$ と $div^* X$ はそれぞれ接ベクトル場 X の湧き出し度，渦度とでもよぶべき量を表す関数であり，

$$\begin{aligned} div^* X = 0 \qquad & X \in Im\,G \\ div\,X = 0 \qquad & X \in Im\,G^* \end{aligned} \tag{1.6}$$

が成り立つ．

このように，$Im\,G$ と $Im\,G^*$ の元は対極的な性格をもち，共通部分をもたない：$Im\,G \cap Im\,G^* = 0$．さらに構成の仕方から $Im\,G$ と $Im\,G^*$ は "同じ大きさ＝同じ次元" をもつと思ってもよいであろう．両方とも無限次元であるから同じ次元とは意味をなさないが，ここでは自然な仕方

$$grad\,f \quad \Longleftrightarrow \quad grad^* f \tag{1.7}$$

で 1 対 1 対応があるという意味に受け取ってもらいたい．

$Im\,G$ と $Im\,G^*$ の $V(S)$ の中での直和 $Im\,G \oplus Im\,G^*$ を考えよう．これは $Im\,G$ と $Im\,G^*$ のベクトル場の和で書ける S 上の接ベクトル場全体のなす部分空間であり，当然のことながら吸い込み，湧き出しも，渦も一般にもっている．

$Im\,G \oplus Im\,G^*$ は $V(S)$ の中でどれほどの部分を占めるのだろうか？

もし $Im\,G \oplus Im\,G^* = V(S)$ であれば，$V(S)$ はちょうど半分の次元をもつ 2 つ

の部分空間の過不足のない和になっていると見なせる．実際 S がガウス曲率 $+1$ の定曲率 2 次元球面の場合はそうなっている．そしてこのことはいつもおおむね正しい．つまり

- $V(S)$ の中で $ImG \oplus ImG^*$ の補空間をとるとそれは有限次元である

ことがわかる．

さてかりに S 上の接ベクトル場 X で $div\, X = div^*\, X = 0$ を満たすものがあれば，Xは $ImG \oplus ImG^*$ に属さないことがわかる．S が**ガウス曲率**（Gaussian curvature）0 の**平坦トーラス**（flat torus）の場合はこのようなものの例はすぐわかり，図 4 にあげた 2 つの流線の単位接ベクトル場とそれらの一次結合をとればよい．

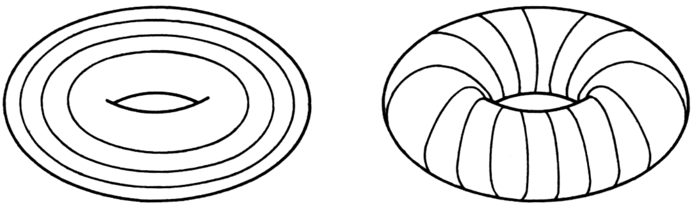


図 4

S の種数 $g = g(S)$ が高い場合には平坦トーラスのようにすぐわかる例をあげるわけにはいかないが，そういうものは確かに存在し，たとえばガウス曲率 -1 の**双曲型曲面**（hyperbolic surface）では，平坦トーラスの場合と異なり重複度をこめて必ず $2g-2$ 個の孤立した零点をもつ．これらの零点は吸い込みでも，湧き出しでも，渦でもなく重複度 1 ならば図 5 のような状態になっている．

これらは**調和ベクトル場**（harmonic vector field）とよばれ，その全体は $V(S)$ の有限次元部分線形空間 $H(S)$ をなす．またその次元は

$$\dim H(S) = 2g \tag{1.8}$$

で与えられる．そして $V(S) = H(S) \oplus ImG \oplus ImG^*$ である．$\dim H(S)$ がディラック作用素の指数の一例を与える．

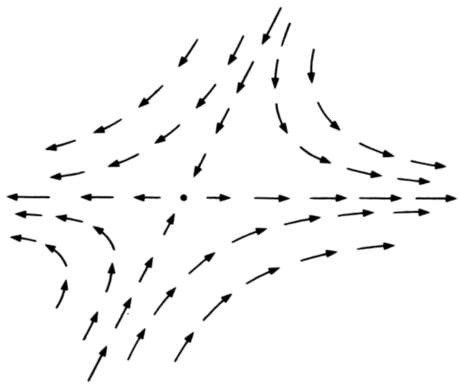


図 5

$V(S)$ は2次元多様体 S の接ベクトルバンドルのなめらかな切断全体のなすベクトル空間である．一般に多様体上で幾何学的に構成されたベクトルバンドルの切断全体のなす無限次元ベクトル空間 X を考えると，その中に自然な仕方で互いに1対1対応をもつ2つの無限次元部分空間 Y と Y* があり，それらの和は有限次元の差を除いて X 全体に等しい．すなわち線形写像

$$T : \mathrm{Y} \oplus \mathrm{Y}^* \longrightarrow \mathrm{X} \tag{1.9}$$

の核と余核はともに有限次元になる．これは多様体のもつ**ポアンカレ双対性**（Poincaré duality）という幾何学的性質の反映である．そして $\dim \mathit{ker}\ T - \dim \mathit{coker}\, T$ が，あるディラック作用素の指数として表現される．つまり指数とはこの場合，“ほとんど半分次元”の2つの対になった無限次元部分空間が全体をほとんど覆っているのだが，有限次元の過不足があり，過を＋（プラス），不足を－（マイナス）と数えたその和である．

1.2　局所指数定理

局所指数定理を曲面上のベクトル場の例について述べてみよう．目的は $\dim H(S)$ を“指数密度（index density）”とよばれる S 上のある2次微分形式 α によって，

$$2 - \dim H(S) = \int_S \alpha \tag{1.10}$$

と表すことである．左辺の 2 の由来はすぐ下で説明する．α は S のガウス曲率を使って表されるのだが，α がわかると $\int_S \alpha = 2 - 2g$ が導かれ (1.8) が得られる．

線形作用素

$$D^+ \ : \ C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \ \longrightarrow \ V(S)$$

を

$$D^+(f,h) = G(f) + G^*(h) \tag{1.11}$$

で定義する．これは 1 階偏微分作用素である．

$D^+(f,h) = 0$ となるのは，f と h がともに定数関数のときに限るので，$\dim ker\, D^+ = 2$ である．上に述べたことにより $coker\, D^+ \cong H(S)$ であり，$\dim\ coker\ D^+ = \dim H(S)$ となる．したがって D^+ の指数 $ind(D^+)$ を

$$ind(D^+) = \dim\ kerD^+ - \dim\ cokerD^+ \tag{1.12}$$

で定義すれば

$$ind(D^+) = 2 - \dim H(S) \tag{1.13}$$

である．局所指数定理は $ind(D^+)$ を (1.10) の右辺で表すような微分形式 α を導くものである．2 次微分形式 α を求めるアイデアを説明しよう．

線形写像 G,G^* の核はともに定数関数からなる 1 次元部分空間であるから，かりに無限次元のものをあたかも有限次元であるかのように見なせば

$$\dim C^\infty(S) = \dim\ Im\, G + 1 = \dim\ Im\, G^* + 1 \tag{1.14}$$

であり

$$\begin{aligned} & 2 - \dim H(S) \\ & = (2 + \dim(Im\, G \oplus Im\, G^*)) - \dim(H(S) \oplus Im\, G \oplus Im\, G^*) \\ & = \dim(C^\infty(S) \oplus C^\infty(S)) - \dim V(S) \end{aligned} \tag{1.15}$$

と書ける．この式の右辺は $(2 - \dim H(S))$ に

$$\dim(Im\, G \oplus Im\, G^*) - \dim(Im\, G \oplus Im\, G^*)$$

$$= \infty - \infty \quad (= 0\,?) \tag{1.16}$$

という余分なものを付け加えたものだが，わざわざ余分をつけたのはこうすることによって $2 - \dim H(S)$ を S の局所（無限小）幾何学と関係づけることができるからである．

この理由を，ここではたいへん荒っぽく，つぎのようにいってみよう．

調和ベクトル場というものは S の大域的な幾何学を鋭敏に反映するもので局所的にはとらえられない．たとえば S のリーマン計量をある1点 p の近くで少し変形すれば，調和ベクトル場は p から離れたすべての点でその値を変える．つまり S の1点での局所的な変形は調和ベクトル場の遠方での性格に影響を及ぼす．したがって調和ベクトル場は S が全体としてどのような形状をもっているかに強く影響される．このため $H(S)$ に関する事柄，たとえば $\dim H(S)$ を直接 S の局所幾何学と結び付けるのはたいへんむずかしい．むしろ $\dim H(S)$ がまったく局所的に無限小幾何学のことばで書けてしまうことのほうが驚きなのである．

$\dim(Im\,G \oplus Im\,G^*) - \dim(Im\,G \oplus Im\,G^*)$ を加えることが $\dim H(S)$ を S の局所幾何学と結び付けるための手段になることは**フーリエ変換**（Fourier transform）論に基づいて理解するのが一番妥当なのだが，古典力学の量子化の考えにも通じている．

古典力学では力学系に対しその**オイラー・ラグランジュ方程式**（Euler-Lagrange equation）の解空間だけをとりだして考察する．量子化とはオイラー・ラグランジュ方程式の解だけでなく，あらゆる場の量のもたらす可能性を取り込むことに相当する．上の例で調和ベクトル場の空間は古典力学のオイラー・ラグランジュ方程式の解空間に相当し，$\dim(Im\,G \oplus Im\,G^*) - \dim(Im\,G \oplus Im\,G^*)$ を付け加えるのはあらゆる場の量のもたらす可能性を取り込むことにあたる．すべての場の量を取り込むことでいくらでも高い振動数の波を考えることになる．

フーリエ変換論でよく知られているように，高い振動数の波は空間の微小な部分を考えることに相当し，無限に高い振動数からもたらされる情報は空間の無限小幾何学の言葉で表現される．そして作用素の指数は実は無限に高い振動数の波からもたらされる情報によりとらえられることがわかるのである．このことは次節でふれる作用素の指数のホモトピー不変性という性質と関係している．

技術的には，以上のことはディラック作用素からつくられるラプラシアンの熱核

の解析によって遂行される．量子化ではすべての量を取り込んで加え合わせると無限大の発散が現れ，適当な正則化を行って意味のある有限量を取り出す．同様に $\dim(Im\,G \oplus Im\,G^*) - \dim(Im\,G \oplus Im\,G^*)$ を取り込むことによって生ずる発散項は熱核の漸近展開の発散項として現れるのだが，指数に関しては発散部分を取り除いた部分でわかるのである．以下にそのことの説明をしてみよう．

まず $\dim(Im\,G \oplus Im\,G^*) - \dim(Im\,G \oplus Im\,G^*)$ を加えて得られる（1.15）の第3行はこのままでは意味をなさないので，その厳密な意味づけから始める．

作用素

$$D^- : V(S) \longrightarrow C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \tag{1.17}$$

を

$$D^-(X) = (div\,X, div\,X^*) \tag{1.18}$$

で定義する．これは D^+ の**共役作用素**（adjoint operator）とよばれる作用素になり，

$$ker\,D^- \cong coker\,D^+, \quad coker\,D^- \cong ker\,D^+ \tag{1.19}$$

が成り立つ．

ここで本書の第2章以降の内容と合うように，つぎのフォーミュレーションをする．D^+ と D^- を組み合わせて

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \\ \oplus \\ V(S) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \\ \oplus \\ V(S) \end{matrix} \tag{1.20}$$

をつくる．

$D^\pm, D$ などはディラック作用素の例である．とくに D は**自己共役ディラック作用素**（self-adjoint Dirac operator）である．

D の2乗 D^2 は

$$D^2 = \begin{pmatrix} D^-D^+ & 0 \\ 0 & D^+D^- \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \\ \oplus \\ V(S) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \\ \oplus \\ V(S) \end{matrix} \tag{1.21}$$

であり，2つの**ラプラシアン**（Laplacian）

$$D^-D^+ : C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \longrightarrow C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \tag{1.22}$$

$$D^+D^- : \quad V(S) \longrightarrow V(S) \tag{1.23}$$

を組み合わせたものである．

D^-D^+, D^+D^-は自己共役な（一般化された意味での）ラプラス作用素であり，有限次元の場合の非負対称行列と似た性質をもっている．つまり D^-D^+, D^+D^- の**固有値**（eigenvalue）はすべて非負の実数で，$C^\infty(S) \oplus C^\infty(S)$ と $V(S)$ はそれぞれ D^-D^+と D^+D^-の**固有空間**（eigenspace）の直和に分解される．

さらに $\phi = (f,h) \in C^\infty(S) \oplus C^\infty(S)$ を固有値 $\lambda > 0$ に属する D^-D^+の固有ベクトルとすれば，すぐに確かめられるように $D^+\phi \in V(S)$ は同じ固有値 $\lambda > 0$ に属する D^+D^-の**固有ベクトル**（eigen vector）になる．

この関係は逆方向にも成り立ち，D^+, D^-により D^-D^+, D^+D^-の正の固有値に属する固有空間たちは互いに移り合い，1対1の関係になる．したがって

- D^-D^+と D^+D^-の0でない固有値は重複度を込めて一致する

ことがわかる．線形作用素 D^-D^+の固有値は

$$0 \le \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \tag{1.24}$$

という（有限値には）集積点をもたない実数列となり，級数

$$\zeta_{D^-D^+}(t) = \sum e^{-\lambda_i t} \tag{1.25}$$

は任意の $t > 0$ に対し絶対収束する．同様に D^+D^-に対しても $\zeta_{D^+D^-}(t)$ が定義され，両者の差 $\zeta_{D^-D^+}(t) - \zeta_{D^+D^-}(t)$ をつくるとすぐ上の • から0でない固有値からくる項は打ち消し合って等式

$$\begin{aligned}(2 - \dim H(S) =) \dim kerD^+ - \dim kerD^- \\ = \zeta_{D^-D^+}(t) - \zeta_{D^+D^-}(t)\end{aligned} \tag{1.26}$$

がすべての $t > 0$ で成立する．

(1.26) が (1.15) の厳密な意味づけである．つまり $t > 0$ で厳密に成立する式 (1.26) で形式的に $t = 0$ とすればすべての $e^{-\lambda_i t} = 1$ となり，(1.15) に等しくなる．さらに $t \to \infty$ ではすべての $\lambda_i > 0$ に対し $e^{-\lambda_i t} = 0$ で，(1.26) の右辺は文字どおり左

辺に等しいことに注意しよう．

このように $\zeta_{D^-D^+}(t)$（$\zeta_{D^+D^-}(t)$）は $t=0$ のときの $C^\infty(S)\oplus C^\infty(S)$（$V(S)$）の恒等作用素のトレースと $t=\infty$ のときの定数関数の空間（$H(S)$）への射影のトレースをつなぐ t の関数になっている．

(1.26) はこのままでは同じものを差し引きしただけで何の意味もなさないが，これをつぎのように取り扱う．

（1.26）から $\zeta_{D^-D^+}(t)$ と $\zeta_{D^+D^-}(t)$ の差は t によらない定数であるが，それぞれは定数ではなく $t\to 0$ で発散する t の関数である．熱核の $t\to 0$ でのふるまいを漸近展開によって調べる．漸近展開を用いて発散部分を取り除き，定数項を取り出すことを考えるのであるが，$t\to 0$ での漸近展開を考えることからこの定数項が S の局所幾何学の言葉で書けることになる．(1.26) の右辺を時間 t と S の局所座標 x,y の関数として表されたラプラシアンの熱核によって書き下して（この段階がフーリエ変換または量子論的にいえば粒子から波動への変換にあたる），$t\to 0$ の極限の情報から Sの無限小幾何学との関連で $ind(D^+)$ を読み取ることにより，意味のあるものにすることができるのである．

ラプラシアン D^-D^+の**熱核**（heat kernel）$p_t^+(x,y)$ は D^-D^+の**正規化**（normalize）された固有ベクトルの組 $\{\phi_\lambda\}$ を用いて

$$p_t^+(x,y)=\sum e^{-\lambda t}\phi_\lambda(x)\otimes\bar{\phi}_\lambda(y) \tag{1.27}$$

と書くことができる．$\{\phi_\lambda\}$ は正規化されているので

$$\int_S \phi_\lambda(x)\bar{\phi}_\lambda(x)vol_S=1 \tag{1.28}$$

であり，したがって $p_t^+(x,y)$ の対角集合 $\Delta_S\subset S\times S$ 上での積分は等式

$$\int_S p_t^+(x,x)vol_S=\zeta_{D^+D^-}(t) \tag{1.29}$$

を満たす．

ラプラシアン D^+D^-に対しても同様に熱核 $p_t^-(x,y)$ が構成されて前ページの ● から

$$2-\dim H(S)=\int_S p_t^+(x,x)vol_S-\int_S p_t^-(x,x)vol_S \tag{1.30}$$

となる．

p_t^+ と p_t^- をまとめて

$$p_t = \begin{pmatrix} p_t^+ & 0 \\ 0 & p_t^- \end{pmatrix} : \begin{matrix} C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \\ \oplus \\ V(S) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(S) \oplus C^\infty(S) \\ \oplus \\ V(S) \end{matrix} \tag{1.31}$$

とおき，ディラック作用素 D の2乗 D^2 の熱核とよぶ．

(1.30) の右辺を D^2 の熱核 p_t の**超トレース**（super trace）とよび，$Str(p_t)$ と表す．

$$Str(p_t) = \int_S p_t^+(x,x) vol_S - \int_S p_t^-(x,x) vol_S \tag{1.32}$$

(1.30) は

$$2 - \dim H(S) = Str(p_t) \tag{1.33}$$

となる．

(1.20), (1.21), (1.31) および (1.33) は単なる書き直しに過ぎないようにみえるが，$C^\infty(S) \oplus C^\infty(S)$ と $V(S)$ はまとまって曲面 S 上のクリフォード代数の作用をもつクリフォード加群というものになり，クリフォード代数の表現論の立場からはこのようにまとめて考えるほうが計算上も理論上も自然である．

一方，熱核 $p_t(x,y)$ は熱方程式

$$(\partial_t - D_x^2)\varphi = 0 \tag{1.34}$$

の基本解になっており，$t > 0$ が十分小さいときは $S \times S$ の対角集合の近傍に集中する．したがって十分小さい $t > 0$ に対し $p_t(x,y)$ は反復積分を用いた近似解から摂動によって構成することができ，曲面 S のリーマン計量を用いて局所座標 x, y による表示を得ることができる．(1.27) での熱核の表示は固有関数によるものだが，近似解から摂動によって構成されたものはそのフーリエ変換にあたる．また反復積分による構成から，$t \to 0$ での $p_t(x,x)$ の**漸近展開**（asymptotic expansion）

$$p_t(x,x) \sim \frac{\alpha_{-1}(x)}{t} + \alpha_0(x) + \alpha_1(x)t + \cdots \tag{1.35}$$

が得られる．(1.35) は右辺の級数（一般に収束しない）を任意に選んだ N で打ち切ったものに対し，$t \to 0$ で

$$p_t(x,x) = \frac{\alpha_{-1}(x)}{t} + \alpha_0(x) + \alpha_1(x)t + \cdots + \alpha_N(x)t^N + O(t^{N+1}) \tag{1.36}$$

が成り立つという意味である.

(1.35) と (1.36) の $\alpha_i(x)$ はつぎのようなものである.

$C^\infty(S) \oplus C^\infty(S)$ は S 上の自明なバンドル $\varepsilon = S \times \mathbf{R}$ の 2 つの直和 2ε のなめらかな切断全体のなす空間であり, $V(S)$ は S の接バンドル TS のなめらかな切断全体のなす空間である. したがって (1.31) から p_t はバンドル $2\varepsilon \oplus TS$ のなめらかな切断のなす空間に作用している.

$End(2\varepsilon \oplus TS)$ を, 各点 $x \in S$ でのファイバーが $2\varepsilon \oplus TS$ の x でのファイバーの線形写像全体である S 上のベクトルバンドルとする. (1.35) と (1.36) の $\alpha_i(x)$ たちは $End(2\varepsilon \oplus TS)$ に値をとる関数であり, S の曲率とその微分により表される.

(1.26) の左辺が t によらないことから, $2 - \dim H(S)$ は $\alpha_0(x)$ のみによることがわかる. 直和分解 $2\varepsilon \oplus TS$ に応じて各点で線形写像 $\alpha_0(x)$ のトレースを 2ε と TS の上でとり, それらの差を $Str\,\alpha_0(x)$ と書く. すると

$$2 - \dim H(S) = Str(p_t) = \int_S Str\,\alpha_0(x) vol_S \tag{1.37}$$

が導かれる. 結局

$$\alpha = Str\,\alpha_0(x) vol_S \tag{1.38}$$

が求める指数密度である.

上の過程で $t \to 0$ での極限を考えることが, 先に述べた無限に高い振動数の波からの寄与を取り出すことに相当するのである. 結局熱核が, **スペクトル不変量**（spectral invariant）である $ind(D^+)$ と S の無限小幾何学を, フーリエ変換を通して結びつけているのである.

1.3 指　　　数

前節では曲面上のベクトル場の例について局所指数定理のアイデアの概略を述べたが, この節では作用素の指数の概念をもう少し一般的に説明する.

指数の概念は別に微分作用素に限ったものではなく, より一般の作用素に対し定義される.

有限次元のベクトル空間 V と W の間の線形写像 $T : V \to W$ に対し, $ker\,T =$

$\{v \in V \mid T(v) = 0\}$, $coker\,T = W/Im\,T$ とすれば,

$$\dim ker\,T - \dim coker\,T = \dim V - \dim W \tag{1.39}$$

が成り立つ.

問　(1.39) を証明せよ.

無限次元の**可分なヒルベルト空間**（separable Hilbert space）H_1とH_2の間の線形写像$T: H_1 \to H_2$のことを，通常**線形作用素**（linear operator）とよぶ.

(1.39) の右辺は無限次元では意味をなさない．左辺はどうだろうか．線形作用素Tに対し，$ker\,T$は定義されるが一般には有限次元ではない．$coker\,T$は一般に$Im\,T$がH_2の閉部分空間にならないので定義できず，定義されてももちろん有限次元とは限らない．したがって (1.39) の左辺に当たる量は右辺と同様無限次元の線形作用素では一般に定義できない.

しかし (1.39) の左辺がきちんと定義される線形作用素のクラスで，フレドホルム作用素とよばれるものがある.

【定義 1.1】　ヒルベルト空間H_1とH_2の間の線形写像$T: H_1 \to H_2$でつぎの条件を満たすものを**フレドホルム作用素**（Fredholm operator）という.

(1)　$Im\,T$はH_2の閉部分空間（closed subspace）である.

(2)　$ker\,T, coker\,T$はともに有限次元である.

フレドホルム作用素$T: H_1 \to H_2$に対し，その**指数**（index）$ind(T)$を

$$ind(T) = \dim\ ker\,T - \dim\ coker\,T \tag{1.40}$$

で定義する．$ind(T)$は整数である.

フレドホルム作用素の指数の基本的な性質をあげると

(1)　Tがフレドホルム作用素でAが**コンパクト作用素**（compact operator）ならば，$T + A$はフレドホルム作用素であり，

$$ind(T + A) = ind(T) \tag{1.41}$$

が成り立つ.

(2) T がフレドホルム作用素で，S が有界作用素かつ**ノルム位相**（norm topology）で T に十分近いとすれば，S もフレドホルム作用素であり，

$$ind(T) = ind(S) \tag{1.42}$$

が成り立つ．

ヒルベルト空間 H 上のフレドホルム作用素全体のなす集合を $\mathcal{T}$ とし，$\mathcal{T}$ にノルム位相を入れる．フレドホルム作用素の性質 (2) は

$$ind : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbf{Z} \tag{1.43}$$

が連続写像であることをいっている．この写像は全射であり，また同じ指数をもつ2つの作用素は $\mathcal{T}$ の同じ連結成分に属することがわかる．したがって指数は全単射

$$ind : \pi_0(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbf{Z} \tag{1.44}$$

を導く．ただし π_0 は弧状連結成分のなす集合を表す．

さて上の式 (1.39) の左辺は有限次元の線形写像の指数 $ind(T)$ であるが，この式は $ind(T)$ が T によらず V と W の次元だけで決まってしまうことを表している．つまり，線形写像の性質を何らかの方法でとらえる量を探そうとする立場からいえば，有限次元の場合は指数なる概念はあまり意味をなさない．

しかし無限次元になると事情が違って，$ind(T)$ は T によって異なり，その意味で線形作用素 T の性質を反映するものと考えてよい．指数は無限次元ではじめて意味をもつ概念なのである．このことの簡単ではあるが基本的な例を以下にあげる．

■ **例 1.1** ■ シフト作用素

$H = L^2(\mathbf{Z}_+)$ を可算無限個の基底 $e_1, e_2, \cdots$ の複素一次結合 $v = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots$, $(a_1, a_2, \cdots \in \mathbf{C})$, で

$$\|v\|^2 = |a_1|^2 + |a_2|^2 + \cdots \qquad < +\infty \tag{1.45}$$

を満たすものの全体のなすヒルベルト空間とする．$n \in \mathbf{Z}$ に対し，線形作用素 $T_n : L^2(\mathbf{Z}_+) \to L^2(\mathbf{Z}_+)$ を

$$\begin{aligned} T_n(e_k) &= e_{k+n} \qquad & k+n \geq 1 \\ T_n(e_k) &= 0 \qquad & k+n < 1 \end{aligned} \tag{1.46}$$

で定義し，これを**シフト作用素**（shift operator）とよぶ．

シフト作用素はフレドホルム作用素であり指数 $ind(T_n)$ が定義され

$$ind(T_n) = -n \tag{1.47}$$

である．

問　(1.47) を証明せよ．

■ **例 1.2** ■　ウィナー・ホップ作用素

上のシフト作用素の例では指数とトポロジーとの関連は現れていない．そこで本質的にシフト作用素と同じであるが，トポロジーとの関連が見えてくる作用素の例である**ウィナー・ホップ作用素**（Wiener-Hopf operator）をつぎにあげよう．

これは単位円周 S^1 上の作用素で，指数と幾何学との関連を手っ取り早く知るのにもっとも適したものである．ウィナー・ホップ作用素は“いわゆる”**擬微分作用素**（pseudo-differential operator）なる微分作用素の概念を拡張したもののひとつであるが，読者は擬微分作用素を知っている必要もないし気にする必要もない．以下にあげる例はきわめて直感的に理解しやすいもので，指数の概念を知るための方便と思っていただいてよい．

もう一言ことわると，擬微分作用素の指数は境界のある多様体上で定義された微分作用素の指数を考えるとき自然にでてくる．たとえばウィナー・ホップ作用素は，境界のあるリーマン面上の**コーシー・リーマン作用素**（Cauchy-Riemann operator）の指数理論に必ず現れる作用素である．境界のある多様体上の微分作用素の指数理論は現在でも活発に研究されている分野である．

$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ を複素平面内の単位円周とし，$L^2(S^1)$ を S^1 上の複素数値2乗可積分関数全体のなすヒルベルト空間とする．

$\{e_k = z^k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(S^1)$ の正規直交基底をなしており，$f \in L^2(S^1)$ は

$$f = \sum\nolimits_k a_k z^k \tag{1.48}$$

とフーリエ展開される．

$$H_+ = \left\{ f \in L^2(S^1) \;\middle|\; f = \sum\nolimits_{k\geq 1} a_k z^k \right\} \tag{1.49}$$

とおく．H_+は $f \in L^2(S^1)$ の $\{e_k\}_{k\geq 1}$で張られる部分空間であり，フーリエ展開 (1.48) によって例 1.1 のヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{Z}_+)$ と同一視される．

$$p_+ : L^2(S^1) \longrightarrow H_+ \tag{1.50}$$

を L^2 内積による直交射影とする．S^1上の複素数値連続関数 f に対し，M_f で f による積を表し，

$$T_f = p_+ M_f : H_+ \longrightarrow H_+ \tag{1.51}$$

とおく．これは H_0の線形作用素であり，f に付随するウィナー・ホップ作用素とよばれる．$f = z^n$ のときはフーリエ展開を使って，T_f はシフト作用素 T_nと同一視される．

考えやすくするために，とくに f を無限回微分可能な S^1上の複素数値関数としよう．(1.50) の射影 p_+は，$S^1 \times S^1$上の対角集合上で特異性をもつ関数を積分核とする作用素で表せ，T_f は擬微分作用素になる．

さらに任意の $z \in S^1$に対し $f(z) \neq 0$ が成り立てば，T_f はフレドホルム作用素になる．そこで $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ を 0 でない複素数全体の集合とし，$C^\infty(S^1, \mathbf{C}^*)$ を S^1 上の無限回微分可能な $\mathbf{C}^*$値関数の空間に C^∞位相を入れたものとすれば，$f \to T_f$ は連続写像

$$W : C^\infty(S^1, \mathbf{C}^*) \longrightarrow \mathcal{T} \tag{1.52}$$

を定義する．

Wから誘導される $C^\infty(S^1, \mathbf{C}^*)$ と $\mathcal{T}$ の連結成分の間の写像と指数写像を合成すると

$$ind \circ W_* : \pi_0(C^\infty(S^1, \mathbf{C}^*)) \longrightarrow \pi_0(\mathcal{T}) \longrightarrow \mathbf{Z} \tag{1.53}$$

が得られる．

とくに $ind(T_f)$ は $f \in C^\infty(S^1, \mathbf{C}^*)$ の**ホモトピー類**（homotopy class）にしかよらず，f の連続変形によって変わらない．

このことが $ind(T_f)$ を f に関する位相不変量で表せることの根拠を与える．つまり，f の連続変形によって保たれる位相不変量で f のホモトピー類を特徴づけるものがあれば，当然 $ind(T_f)$ はそれによって表現できるはずである．

今の場合，問題の位相不変量は古典的によく知られた“**巻数**（winding number）”という量で与えられる．

$f:S^1\to\mathbf{C}^*$を S^1 から $\mathbf{C}^*$ への連続写像とする．このとき

(1) f に対し“巻数”とよばれる整数 $deg(f)$ が定義され，写像 f の像が原点のまわりを何回転するかを表す.

(2) $deg(f)$ は連続変形によって不変である．つまり f が g に連続に変形できれば，$deg(f)=deg(g)$ となる.

(3) 各整数 $m\in\mathbf{Z}$ に対し，$deg(f)=m$ となる f がある.

巻数 $deg(f)$ の2通りの定義を述べよう.

幾何学的定義:

f を $g=f/|f|$ で置き換えて S^1 から S^1 への写像 g が得られる．$z\in S^1$を $g^{-1}(z)=\{x\}$ が有限集合かつ，すべての x で $dg_x\neq 0$ であるような点とする．ϵ_x を x での g の微分の符号として，$deg(f)=\sum\epsilon_x$とおく.

この方法はつぎのように，交点数を数えることによっても特徴づけられる．$f(S^1)$ の自己交叉点を通らない原点からの半直線を引き，この半直線と $f(S^1)$ の各交点に半直線についた矢印の向きから見て $f(S^1)$ が右側からはいるときは $+1$，左側からはいるときは -1 をあて，これらの総和をとる.

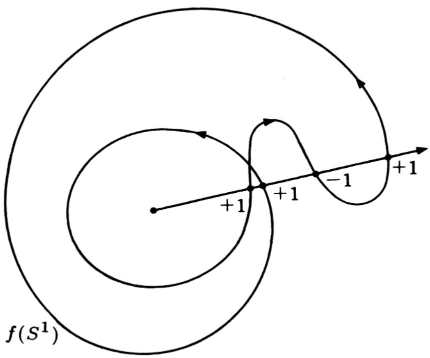


図 6

解析的定義:

$$deg(f)=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{df}{f} \tag{1.54}$$

とおく．ここで f は $[0,2\pi]$ から $\mathbf{C}$ への写像と見なし，積分は $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\dot{f}(\tau)}{f(\tau)}d\tau$ で定義

する．**コーシー積分公式**（Cauchy integral formula）から積分は 2π の整数倍となり，$deg(f)$ は整数である．

位相幾何学の定理をあげる．

【定理 1.2】 $f \to deg(f)$ で与えられる写像は全単射

$$deg : \pi_0(C^\infty(S^1, \mathbf{C}^*)) \longrightarrow \mathbf{Z} \tag{1.55}$$

を誘導する．

以上の準備のもとにウィナー・ホップ作用素に関する指数定理はつぎのように述べられる．

【定理 1.3】 $f \in C^\infty(S^1, \mathbf{C}^*)$ とすれば，

$$ind(T_f) = -deg(f) \tag{1.56}$$

が成り立つ．

$f = z^n$の場合は (1.56) の両辺とも直接わかるので確かめられる．一般の場合は指数のホモトピー不変性から $f = z^n$の場合に帰着できる．

1.3.1 ユークリッド空間上の楕円型作用素

トポロジーと楕円型作用素の指数との関連をみるのに適した例として，ユークリッド空間上の擬微分作用素の例をあげる．

本書で扱うのは境界のないコンパクト閉多様体上の微分作用素であるが，ユークリッド空間のような開いたコンパクトでない空間上でも，適当な境界条件（この場合は無限遠での条件）をつければコンパクト閉多様体上の作用素と似た性質をもつものが得られ，指数定理が定式化できる．

ユークリッド空間上で

$$P\phi(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{i<x,\xi>} p(x,\xi)\widehat{\phi}(\xi)d\xi \tag{1.57}$$

という作用素を考える．ここに $p(x,\xi)$ はなめらかな関数であり，$\widehat{\phi}$ は ϕ のフーリエ変換を表す．

関数 $P\phi(x)$ は関数 ϕ をまず平面波の集まりに分解したのち，点 x で振動数 ξ の平面波に重み $p(x,\xi)$ をつけて集め直したものである．無限遠における境界条件として，

- あるコンパクト集合があって，$\mathbf{R}^n - K$ で $p(x,\xi) = 1$

という条件をつける．フーリエ変換の反転公式（Fourier inversion formula）から $x \in \mathbf{R}^n - K$ で $P\phi(x) = \phi(x)$ であり，さらに

- ϕ, ψ が K 上恒等的に 0 である関数とすれば，$\psi P\phi = \psi\phi$

が成り立つ．

したがって $P\phi = 0$ を満たす恒等的に 0 でない関数 ϕ は K 上恒等的に 0 ではない．さらに一般に $\phi_1, \cdots, \phi_k$ を $kerP$ の一次独立な元とすれば，これらの関数の K 上への制限も一次独立である．こうして $kerP$ の次元あるいは，$ind(P)$ を考える際，K 上での関数および作用素のふるまいが本質的なものとなり，この意味で問題が K に局在化されコンパクト閉多様体上の作用素と似たふるまいをすることになる．

さて $p(x,\xi)$ としてなめらかな写像

$$p(x,\xi) : \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n - \{0\}) \longrightarrow GL(N, \mathbf{C}) \tag{1.58}$$

で上に述べた条件を満たし，すべての $r > 0$ に対し $p(x,\xi) = p(x, r\xi)$ となるものを考えよう．このとき作用素 P はフレドホルム作用素となり，$ind(P)$ が定義される．

$p(x,\xi)$ を $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ の原点を中心とする十分大きな半径をもつ球面 S^{2n-1} に制限して，連続写像

$$p(x,\xi) : S^{2n-1} \longrightarrow GL(N, \mathbf{C}) \tag{1.59}$$

が得られる．

作用素 P は $p(x,\xi)$ に連続的に依存するので，$ind(P)$ のホモトピー不変性から $ind(P)$ は写像 $p(x,\xi) : S^{2n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$ のホモトピー類によってのみ決まることがわかる．

S^{2n-1}から $GL(N, \mathbf{C})$ への連続写像のホモトピー類の集合はホモトピー群 $\pi_{2n-1}(GL(N, \mathbf{C}))$ をなす．これらは線形群のトポロジーとして代数的位相幾何学のおもな研究対象のひとつになっている．とくにボット（Bott）の基本定理によれば，ホモトピー群 $\pi_{k-1}(GL(N, \mathbf{C}))$ は $2N \geq 2k-1$ ならば

$$\pi_{k-1}(GL(N, \mathbf{C})) = \begin{cases} \mathbf{Z} & k \text{ even} \\ 0 & k \text{ odd} \end{cases}$$

で与えられる．

I を任意次元の**恒等作用素** (identity operator) としたとき，

$$ind(P) = ind(P \oplus I) \tag{1.60}$$

となる．したがって $N \geq 2n-1$ と仮定しても一般性は失われずボットの定理が適用でき，$\pi_{2n-1}(GL(N, \mathbf{C}))$ の生成元を 1 つ定めれば，整数 $deg\, p$ を $p : S^{2n-1} \to GL(N, \mathbf{C})$ のホモトピー類を表すものとして定義することができる．

作用素 P に対する指数定理は

【定理 1.4】 $ind(P) = deg\, p$

となる．

1.3.2 多様体上の楕円型偏微分作用素

Mを n 次元閉リーマン多様体，$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ を M上のファイバー次元 N の複素ベクトルバンドルとする．

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ のなめらかな切断全体のなすベクトル空間を $\Gamma(\mathcal{E}), \Gamma(\mathcal{F})$ としよう．整数 $k \geq 0$ に対し $\mathcal{E}$ から $\mathcal{F}$ への次数 k の微分作用素 P とは，線形写像

$$P : \Gamma(\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{F}) \tag{1.61}$$

であって局所座標系によって次数 k 以下の偏微分の多項式係数の行列で表されるものをいう．

すなわち $x_1, \cdots, x_n$ を $U \subset M$の局所座標系とし，$\mathcal{E}|_U \cong U \times \mathbf{C}^N$, $\mathcal{F}|_U \cong U \times \mathbf{C}^N$を局所自明化として P の U上への制限

$$P|_U : \Gamma(\mathcal{E}|_U) = (C^\infty(U))^N \longrightarrow (C^\infty(U))^N = \Gamma(\mathcal{F}|_U) \qquad (1.62)$$

が，多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に対し a_α を $C^\infty(U)$ の元を係数とする $N \times N$ 行列として

$$\sum\nolimits_{|\alpha| \le k} a_\alpha(x) D_x^\alpha \qquad (1.63)$$

の形に書かれるものである．ただし $D_x^\alpha = \partial^{\alpha_1}/\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial^{\alpha_n}/\partial x_1^{\alpha_n}$ である．

P が楕円型であるとは最高次の項において $\partial/\partial x_j$ を ξ_j に置き換えて得られる ξ_j の多項式

$$p_k(x, \xi) = \sum\nolimits_{|\alpha|=k} a_\alpha(x) \xi^\alpha \qquad (\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_n^{\alpha_n}) \qquad (1.64)$$

が $x \in U$，$\xi \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ で正則行列になることである．$p_k(x, \xi)$ を P の**主表象** (principal symbol) とよぶ．

上で導入した $\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ というベクトルは平面波の振動数を表すパラメーターで，$\mathbf{R}^n$の**余接バンドル** (cotangent bundle) の座標と思うのがよい．つまり，$\xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n)$ には平面波 $e^{i(\xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n)}$ が対応している．楕円型の条件とは P を平面波に施したときの条件である．

閉多様体上で定義された次数 k の楕円型偏微分作用素 P は，$\Gamma(\mathcal{E}), \Gamma(\mathcal{F})$ をソボレフ空間 $H^s(\mathcal{E})$, $H^{s-k}(\mathcal{F})$ （位数 s までのすべての偏微分係数が L^2にはいっているもの）にまで拡張して考えれば，**有界作用素**（bounded operator）$P : H^s(\mathcal{E}) \to H^{s-k}(\mathcal{F})$ と見なされる．楕円型であることから P は**パラメトリクス**（parametrix, P の近似逆作用素）をもちフレドホルム作用素となって $ind(P)$ が定義される．

このように楕円型偏微分作用素 P をフレドホルム作用素として扱うためには，ソボレフ空間 H^sにまで範囲を広げて考える必要がある．このとき s の選び方はいろいろあるが，楕円型正則性（第4章参照）から $ker\, P$, $coker\, P$ の元はつねになめらかで s にはよらない．したがって $ind(P)$ は s に無関係に定義できる．

微分作用素はフーリエ変換によって**掛け算作用素** (multiplication operator) にうつされることから，上にあげた楕円型の条件は微分作用素につぎのような性質を与える．$g \in \Gamma(\mathcal{F})$ に対し $Df = g$ のかたちの方程式を考えれば，楕円型の条件は局所的に必ず解があることを保証する．したがって解の存在の条件は，局所的な解の張合せに対する両立条件として，空間の大域的な幾何学性質に本質的に依存

することになる．楕円型微分作用素が空間のトポロジーと密接な関係をもつ根拠である．

またコンパクトな閉多様体上の楕円型微分作用素 P に対しては，ある一定程度以上高い振動数をもった波ばかり集めて $P\psi = 0$ となるような ψ はつくれず，$P\psi = 0$ となる ψ はある一定以下の振動数の波をその成分のうちに大きな割合で含んでいなければならない．

これをつぎのように幾何学的に表現してみる．

Mの余接バンドル T^*Mは Mの点における平面波のパラメーター空間とみなされる．Mの余接バンドル T^*Mの**単位球バンドル** (unit ball bundle) と**単位球面バンドル** (unit sphere bundle) をそれぞれ $B(T^*M)$, $S(T^*M)$ とする．上記のことから，T^*Mの十分大きな半径 $r \gg 0$ の球面バンドル $S_r(T^*M)$ をとれば，$S_r(T^*M)$ によってパラメトライズされる波だけを集めて $P\psi = 0$ を満たす ψ はつくれず，このような ψ は $S_r(T^*M)$ の内側の点によってパラメトライズされる波を大きな割合で含んでいなければならない．

このことが $P\psi = 0$ の解のなすベクトル空間の次元を，$S_r(T^*M)$ からある空間への写像の**写像度** (mapping degree) として表現することを可能にすることになる．この写像は楕円型微分作用素の主表象を用いてつくられる．結論として作用素の指数は主表象で決まる．

この間の事情は複雑さの度合が月とスッポンであることをあえて無視すれば，その類似物を代数学の基本定理の位相幾何学的証明に求めることができる．

「複素係数 n 次代数多項式 $f(z)$ は n 個の零点をもつ」ことの位相幾何学的証明はつぎのようになされる．

$z \to f(z)$ を複素平面 $\mathbf{C}$ から $\mathbf{C}$ への写像とみなし，

1. 十分大きな $r \gg 0$ に対し，半径 r の円周 S_r は $f(z) = 0$ となる z を含まない．
2. 十分大きな $r \gg 0$ に対し，$f(z) = 0$ の根は S_rの内側に含まれ，その個数は $z \to f(z)/|f(z)|$ で定義される写像 $S_r \to S^1$の写像度に等しい．
3. r は十分大きければ任意にとれるので，いっそのこと $r \to \infty$ の極限を考えると，$f(z)$ の低次の項の寄与はすべて消えて，$f(z)$ の最高次数 n

が写像度に等しいことがわかる．

というステップを踏んでなされる．指数定理の位相幾何学的証明はその複雑さを除けば実はこれと似た方法でなされる．つまり，

1. 十分大きな $r \gg 0$ に対し，$S_r(T^*M)$ でパラメトライズされる波を集めたものには $P\psi = 0$ という解はない．
2. 十分大きな $r \gg 0$ に対し，$P\psi = 0$ の解は $S_r(T^*M)$ の内側の点によってパラメトライズされる波を大きな割合で含んでいる．
3. したがって $P\psi = 0$ の解の次元を，$S_r(T^*M)$ から線形群 $GL(n, \mathbf{R})$ または $GL(n, \mathbf{C})$ に関連したある空間への写像の写像度として表現することが可能になり，それは M の特性類で表される．
4. r は十分大きければどこにとっても写像度は同じなので，$r \to \infty$ の極限を考えると偏微分作用素 P の低次の微分項の寄与はすべて消えて，P の最高次の項の寄与（つまり P の主表象）だけが残る．そしてこれが対応する M の特性類を決める．

1.3.3　K 理論

前節の最後に述べた主表象からきまる $S_r(T^*M)$ からの写像はつぎのようにして構成される．

射影 $\pi : S(T^*M) \to M$による $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ の引き戻しを $\pi^*\mathcal{E}, \pi^*\mathcal{F}$とすれば，$P$ の主表象は $p_k(x,\xi) : \mathcal{E}_x \cong \mathcal{F}_x$により $S(T^*M)$ 上のベクトルバンドル同型

$$\sigma(P) : \pi^*\mathcal{E} \longrightarrow \pi^*\mathcal{F} \tag{1.65}$$

を誘導する．

とくに$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ がともに**自明なバンドル**（trivial bundle）$M \times \mathbf{C}^N$ならば，$\pi^*\mathcal{E}, \pi^*\mathcal{F}$ は $S(T^*M)$ 上の自明なバンドル $S(T^*M) \times \mathbf{C}^N$となり，上の $\sigma(P)$ は連続写像

$$\sigma(P) : S(T^*M) \longrightarrow GL(N, \mathbf{C}) \tag{1.66}$$

と見なせる．$S(T^*M)$ から $GL(N, \mathbf{C})$ への連続写像のホモトピー類の集合を $[S(T^*M), GL(N, \mathbf{C})]$ と書く．N 次行列に単位行列を後ろに直和することにより得られる列

$$GL(1,\mathbf{C}) \subset GL(2,\mathbf{C}) \subset \cdots \subset GL(N,\mathbf{C}) \subset \cdots \tag{1.67}$$

に関する**帰納極限**（inductive limit）を

$$K^1(S(T^*M)) := [S(T^*M)\,,\,GL(\infty,\mathbf{C})] = \lim_{N\to\infty}\,[S(T^*M)\,,\,GL(N,\mathbf{C})] \tag{1.68}$$

とする．$K^1(S(T^*M))$ はアーベル群をなすことが知られている．$K^1(S(T^*M))$ は $S(T^*M)$ の***K*群**（K-group）とよばれるもののひとつになる．

$\sigma(P)$ のホモトピー類は $K^1(S(T^*M))$ の元 $[\sigma(P)] \in K^1(S(T^*M))$ を定める．$K^1(S(T^*M))$ の元は連続写像 $f : S(T^*M) \to GL(\infty,\mathbf{C})$ によって表されるホモトピー類である．

多様体 $S(T^*M)$ の**基本ホモロジー類**（fundamental homology class）$[S(T^*M)]$ の像 $f_*[S(T^*M)]$ を，$GL(\infty,\mathbf{C})$ のホモロジー生成元の整数倍で表すことにより準同型写像

$$top-ind : K^1(S(T^*M)) \longrightarrow \mathbf{Z} \tag{1.69}$$

が得られ，この場合の指数定理はつぎで与えられる．

【定理 1.5】 $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ が自明であるとき $ind(P)$ は $[\sigma(P)]$ によって決まり，

$$ind(P) = top-ind(\sigma(P)) \tag{1.70}$$

である．

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ が必ずしも自明でない一般の場合は $B(T^*M)$ の 2 つのコピー $B^+(T^*M)$, $B^-(T^*M)$ を $S(T^*M)$ で張り合わせた空間 $S'(T^*M) = B^+(T^*M) \cup_{S(T^*M)} B^-(T^*M)$ をつくる．$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ を射影によってそれぞれ $B^+(T^*M)$, $B^-(T^*M)$ に引き戻したものを $\sigma(P)$ によって張り合わせることにより，$S'(T^*M)$ 上のベクトルバンドル $V_{\sigma(P)}$ が得られる．

$S'(T^*M)$ 上のベクトルバンドルの同型類の全体 $Vect(S'(T^*M))$ はファイバーごとの直和（ホイットニー和）をとることにより**アーベル半群**（abelian semi-group）となる．一般に半群 A に対し，$A \times A$ の同値関係

$$(a_1, a_2) \sim (a'_1, a'_2) \iff (a_1 + a, a_2 + a) = (a'_1 + a', a'_2 + a') \quad {}^{\exists}a, a' \in A \tag{1.71}$$

による $A \times A$ の商を B とすれば B はアーベル群となる．この構成を $A = Vect$ $(S'(T^*M))$ に対し適用して得られるアーベル群を $K(S'(T^*M))$ と書く．これも $S'(T^*M)$ の K 群とよばれるもののひとつである．

上と同様に $\sigma(P)$ は元$\left[V_{\sigma(P)}\right] \in K(S'(T^*M))$ を定める．$K(S'(T^*M))$ は，$S'(T^*M)$ から $GL(\infty, \mathbf{C})$ の**分類空間**（classifying space）とよばれる位相空間 BGL $(\infty, \mathbf{C})$ への連続写像のホモトピー類の集合 $[S(M), BGL(\infty, \mathbf{C})]$ として書ける．

$$K(S(M)) \cong [S'(T^*M), BGL(\infty, \mathbf{C})] \tag{1.72}$$

連続写像 $f : S'(T^*M) \to BGL(\infty, \mathbf{C})$ のホモトピー類によって表される $K(S'(T^*M))$ の元に対し，多様体 $S'(T^*M)$ の基本ホモロジー類 $[S'(T^*M)]$ の像 $f_*[S'(T^*M)]$ を，$BGL(\infty, \mathbf{C})$ のあるホモロジー生成元の整数倍で表すことにより，準同型写像

$$top - ind : K(S'(T^*M)) \longrightarrow \mathbf{Z} \tag{1.73}$$

が得られる．そして指数定理はつぎのようになる．

【定理 1.6】　$ind(P)$ は $[\sigma(P)]$ によって決まり，

$$ind(P) = top - ind(V_{\sigma(P)}) \tag{1.74}$$

である．

1.3.4　特性類と線形群のトポロジー

前節で楕円型偏微分作用素に対し，その表象を用いて $GL(n, \mathbf{R})$, $GL(n, \mathbf{C})$ またはその分類空間への写像が定義された．これらの空間の（コ）ホモロジー群は多様体の理論で特性類とよばれる位相不変量を与える．定理 1.5 と定理 1.6 の 2 つの $top - ind$ は，特性類を用いて純粋に位相的に書かれる量である．

リーマン多様体や複素多様体の理論で特性類が広く使われるが，これらは古典的な位相不変量オイラー（Euler）数の一般化である．

閉多様体 M上に接ベクトル場 v で孤立した有限個の点のみで零になるものをとると，v の各零点でベクトル場の指数とよばれる整数が定義され，これらの総和が Mのオイラー数を与える．

Mの特性類とはこれを一般化したものである．M上にk個のベクトル場$v_1, \cdots, v_k$を同時に考える．これらのベクトル場が一次従属になる点からなるMの部分集合はMの位相幾何学的**サイクル**（cycle）をなす．このサイクルの表すMのホモロジー類はk個のベクトル場のとり方によらず決まるが，そのポアンカレ双対であるMのコホモロジー類をMの特性類とよぶ．

さらに一般化してM上のベクトルバンドル$\mathcal{E}$を考え，$\mathcal{E}$のk個の切断$s_1, \cdots, s_k$が一次従属になるMの点からなるサイクルの表すホモロジー類のポアンカレ双対から，$\mathcal{E}$の特性類が得られる．

位相幾何学の定理によって，これらのサイクルのホモロジー類は基本的に線形群$GL(n, \mathbf{R})$または$GL(n, \mathbf{C})$のホモロジー群から導かれることが知られている．

特性類はこのようにベクトルバンドルの切断の一次独立性に対する障害として位相幾何学的に定義されたが，その後チャーンによりベクトルバンドルの曲率の言葉で定義できることが明らかにされた．本書の第4章ではこの定義に従って特性類を解説し，続けて障害理論からの見方について述べる．

アティヤ・シンガー指数定理はそれ以前に知られていた幾何学の代表的ないくつかの定理を，多様体上の楕円型偏微分作用素の指数という概念によって統一したものである．それを以下にあげよう．

- ガウス・ボンネ・チャーン（Gauss-Bonnet-Chern）の定理
- ヒルツェブルフ（Hirzebruch）符号定理
- リーマン・ロッホ（Riemann-Roch）の定理

これらはすべて本書で扱う多様体上のディラック作用素の指数の特別な場合になっており，幾何学的にきわめて自然な形で構成される楕円型偏微分作用素に関するものである．ガウス・ボンネ・チャーンの定理には多様体のオイラー類，リーマン・ロッホの定理には複素多様体のチャーン類，ヒルツェブルフ符号定理には微分可能多様体のポントリャーギン（Pontrjagin）類などの特性類が現れる．

1.3.5 局所指数定理と積分公式

この節の以上の解説は前節と第2章以後の熱核による指数定理の証明よりは，どちらかといえばアティヤ・シンガーのオリジナルな証明（「あとがき」にあげたア

ティヤ・シンガーの論文を参照されたい）にそったものであり，位相幾何学的な色彩の濃いものである．その中核は指数の概念を位相幾何学的な写像度の概念と結びつけ，この写像度が多様体間の写像のもとにどのようにふるまうかを解析することにある．したがって全体の流れは，多様体全体とその上の微分作用素のなすカテゴリーの中を行き来するきわめてカテゴリカルなものになり，微分作用素の与えられたひとつの多様体に固執して考えるという素朴な立場はとらない．

一方本書で扱う局所指数定理の証明はこれとはまったく異なる思想のもとに行われる．

ドラーム（de Rham）の定理から実係数コホモロジー類は閉微分形式で表され，したがって特性類を基本類で値をとった特性数は，対応する閉微分形式の多様体上の積分で表される．とくに楕円型作用素の指数は，対応する特性類を表す閉微分形式の積分になる．

しかし，実係数コホモロジー類に対応する閉微分形式は一意的でなく，完全形式の分だけ任意性がある．多様体上に幾何学的に自然な形で与えられた楕円型偏微分作用素 D に対し，その指数が何らかの仕方で

- D から(幾何学的に）自然に定義される閉微分形式の積分で表される

ことになれば，D の指数と多様体の幾何学との関連がより深く表現されることになるだろう．このことをディラック作用素に対し可能にしてくれるのが局所指数定理である．

局所指数定理が可能になる根拠は前節で触れたように，微分作用素の指数が無限に高い振動数の波からの情報によりとらえられることにあるのだが，実際に空間の各点での極限操作が可能になるのはディラック作用素の場合に限られる．

以上で指数の概念のあらましの解説を終わる．

最初に注意したようにこの節は数学的な厳密さを犠牲にした．とくに解析に関することがらで厳密な取扱いが簡単でないものが多く，興味をもたれる読者はその方面の専門書を読まれたい（いくつかの文献は巻末にあげておいた）．当然のことながら第2章以後を読まれるのにはその必要はまったくない．

2

多様体論からの準備

微分可能多様体とその上のファイバーバンドル，とくにベクトルバンドルについての基本的な事柄をまとめる．ベクトルバンドルの切断は多様体上の関数の一般化であり，微分作用素のはたらく場所を提供する．多様体上の微分作用素は座標のとり方に独立なかたちをもたなければならないので，接続と共変微分の概念が必要になる．接続と共変微分を一般のベクトルバンドルについて解説し，とくにリーマン多様体のレビ-チビタ接続をあつかう．接続に付随する重要な不変量として曲率がある．接続と共変微分を曲率との関連が見やすいように記述するため，ベクトルバンドルの平行移動による自明化とリーマン多様体の測地線を用いた標準座標系を構成する．これが実際上の計算にたいへん有用になり，指数定理の証明にとって基本になる．

2.1　ファイバーバンドルと接続

2.1.1　ファイバーバンドルとベクトルバンドル

【定義 2.1】 $\pi : \mathcal{E} \to M$を多様体$\mathcal{E}$から多様体Mへの微分可能写像とする．$(\mathcal{E}, \pi)$が多様体Eをファイバー（fibre）とする**ファイバーバンドル**（fibre bundle）であるとは，Mの開集合U_iによる被覆と**微分同相写像**（diffeomorphism）$\phi_i : \pi^{-1}(U_i) \to U_i \times E$で$\pi : \pi^{-1}(U_i) \to U_i$は$\phi_i$と$U_i$への射影の結合になっているものがあることである．$\mathcal{E}$をファイバーバンドルの**全空間**（total space），Mを**底空間**（base space）とよぶ．

ファイバーバンドル $(\mathcal{E},\pi)$ において，すべての $x\in M$ に対し $\mathcal{E}_x=\pi^{-1}(x)$ は E と**微分同相**（diffeomorphic）である．

写像 $\phi_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times E$ を**局所自明化写像**（local trivialization）とよぶ．$x\in U_i\cap U_j$ に対し $\phi_j\circ\phi_i^{-1}:\{x\}\times E\to\{x\}\times E$ は E の微分同相写像であり，$\mathcal{E}$ は $\{U_i\times E\}$ たちが $\phi_j\circ\phi_i^{-1}$ によって張り合わせられてできていると見なすことができる．

【定義 2.2】 ベクトル空間 E をファイバーとするファイバーバンドル $\pi:\mathcal{E}\to M$ で，すべての $x\in U_i\cap U_j$ に対し，$\phi_j\circ\phi_i^{-1}:\{x\}\times E\to\{x\}\times E$ が E の線形同型写像になっているように，微分同相写像 $\phi_i:\pi^{-1}(U_i)\to U_i\times E$ をとることができるものを**ベクトルバンドル**（vector bundle）とよぶ．

ベクトルバンドル $\pi:\mathcal{E}\to M$ の切断（cross section）s とは微分可能写像 $s:M\to\mathcal{E}$ で $\pi(s(x))=x$ となっているものをいう．すべてのなめらかな切断の集合を $\Gamma(M,\mathcal{E})$ で表す．ただしなめらかとは無限回微分可能なことを意味する．

自明なベクトルバンドル $\mathcal{E}=M\times E$ の場合には，$\Gamma(M,\mathcal{E})$ は M から E への C^∞ 写像の全体の集合 $C^\infty(M,E)$ と同じである．

多様体の間の微分可能写像 $\phi:M_1\to M_2$ と M_2 上のベクトルバンドル $\mathcal{E}$ に対し，$\phi^*\mathcal{E}$ を

$$\phi^*\mathcal{E}=\left\{(x,v)\in M_1\times\mathcal{E}\,\middle|\,v\in\mathcal{E}_{\phi(x)}\right\} \tag{2.1}$$

とおき，$\pi:\phi^*\mathcal{E}\to M_1$ を $\pi(x,v)=x$ と定義すれば，$(\phi^*\mathcal{E},\pi)$ は M_1 上のベクトルバンドルとなる．これを ϕ による $\mathcal{E}$ の**引き戻し**（pull back）とよぶ．

2つのベクトルバンドル $\pi_1:\mathcal{E}_1\to M_1$，$\pi:\mathcal{E}_2\to M_2$ に対し，各点 $(x,y)\in M_1\times M_2$ でベクトル空間 $\mathcal{E}_{1x}$ と $\mathcal{E}_{2y}$ の直和 $\mathcal{E}_{1x}\oplus\mathcal{E}_{2y}$ とテンソル積 $\mathcal{E}_{1x}\otimes\mathcal{E}_{2y}$ をとって，これらをファイバーとする $M_1\times M_2$ 上のベクトルバンドル

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_1\hat{\oplus}\mathcal{E}_2&\longrightarrow M_1\times M_2\\ \mathcal{E}_1\hat{\otimes}\mathcal{E}_2&\longrightarrow M_1\times M_2\end{aligned} \tag{2.2}$$

が構成される．とくに $M=M_1=M_2$ とし，$j:M\to M\times M$ を $j(x)=(x,x)$ $(x\in M)$ として，M 上の2つのベクトルバンドル $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ から，M 上のベクトルバ

ンドル

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = j^* \left(\mathcal{E}_1 \hat{\oplus} \mathcal{E}_2\right)$$
$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 = j^* \left(\mathcal{E}_1 \hat{\otimes} \mathcal{E}_2\right) \tag{2.3}$$

がつくられる．これらをそれぞれ $\mathcal{E}_1,\mathcal{E}_2$ の**ホイットニー和**（Whitney sum），**テンソル積**（tensor product）とよぶ．

【**定義 2.3**】 **リー群**（Lie group）G を**構造群**（structure group）とする**主バンドル**（principal bundle）P とは，G をファイバーとするファイバーバンドル $\pi : P \to M$ で，G の各ファイバーへの自由かつ**推移的**（transitive）な右作用

$$(p \cdot g) \cdot h = p \cdot (gh), \quad p \in P,\ g, h \in G \tag{2.4}$$

があり

$$\pi(p \cdot g) = \pi(p) \qquad p \in P,\ g \in G \tag{2.5}$$

が成り立っているもののことである．

多様体 E に対し，$Diff(E)$ で E の微分同相全体のなす群を表す．P が G を構造群とする M上の主バンドルで，E が準同型写像

$$\rho : G \longrightarrow Diff(E) \tag{2.6}$$

によって与えられる G の左作用をもつとする．

【**定義 2.4**】 直積 $P \times E$ を同値関係

$$(p \cdot g, f) \sim (p, \rho(g)f) \tag{2.7}$$

で割った商空間を $P \times_G E$ とすれば，$P \times_G E$ は E をファイバーとする M 上のファイバーバンドルになる．これを**随伴バンドル**（associated bundle）とよぶ．

とくに，E が G の表現空間であるベクトル空間のとき，M上のベクトルバンドル

が得られる．M の N 次元ベクトル空間をファイバーとするすべてのベクトルバンドルは，$GL(N)$ を構造群にもつ主バンドルの随伴バンドルである．

【命題 2.5】 $\mathbf{R}^N$ をファイバーとする M 上のベクトルバンドル $\mathcal{E}$ に対し，$GL(\mathcal{E})$ を $x \in M$ でのファイバーが $\mathbf{R}^N$ からファイバー $\mathcal{E}_x$ へのすべての線形同型写像のなす空間であるファイバーバンドルとする．このとき，$GL(\mathcal{E})$ は構造群 $GL(N, \mathbf{R})$ をもつ主バンドルとなり，$\mathcal{E}$ は $GL(\mathcal{E}) \times_{GL(N,\mathbf{R})} \mathbf{R}^N$ と同型である．同じ結果は $\mathbf{R}^N$ を $\mathbf{C}^N$ に置き換えて成り立つ．

【定義 2.6】 命題 2.5 の $GL(\mathcal{E})$ を $\mathcal{E}$ の**枠バンドル**（frame bundle）とよぶ．

$\mathcal{E} = P \times_G E$ を表現 $\rho : G \to End(E)$ によって与えられる主バンドル P の随伴ベクトルバンドルとする．E^* を双対ベクトル空間，$\rho^* : G \to End(E^*)$ を ρ の双対表現とする．ρ^* に付随する随伴ベクトルを $\mathcal{E}^* = P \times_G E^*$ と書き，$\mathcal{E}$ の双対バンドルとよぶ．

切断の空間 $\Gamma(M, \mathcal{E})$ と $\Gamma(M, \mathcal{E}^*)$ の間には，$s \in \Gamma(M, \mathcal{E}), t \in \Gamma(M, \mathcal{E}^*)$ に対し

$$< s, t > = t(s)$$

で定義される自然な対写像がある．右辺は M 上の関数である．

$\mathcal{E}$ と $\mathcal{E}^*$ のテンソル積 $End(\mathcal{E}) = \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*$ は，$\mathcal{E}$ のファイバー $\mathcal{E}_x$ の自己準同型写像全体 $End(\mathcal{E}_x)$ のなすベクトル空間をファイバーとするベクトルバンドルである．

2.1.2　テンソルバンドルと微分形式

TM を M の接ベクトルバンドルする．TM の切断 $X \in \Gamma(M, TM)$ を M 上のベクトル場とよぶ．微分可能写像 $\phi : M_1 \to M_2$ に対し，

$$\phi_*(v) \in T_{\phi(x)} M_2, \quad v \in T_x M_1$$

として $\phi_* : TM_1 \to TM_2$ が定義される．とくに M の微分同相写像は TM の微分同相写像を誘導する．

$GL(TM)$ を TM の枠バンドルとする．これは $\dim M = n$ ならば $GL(n)$ を構造

群としてもつ.

E を $GL(n)$ の任意の表現 ρ の表現空間とするとき，対応する随伴バンドル $\mathcal{E} = GL(TM) \times_\rho E$ を M の**テンソルバンドル**（tensor bundle）とよぶ.

$\mathcal{V}$ をテンソルバンドルとする．M上のベクトル場 Xに対し，ϕ_t を Xから生成される Mの微分同相写像の 1 パラメーター族とする．$\Gamma(M, \mathcal{V})$ 上の 1 階微分作用素 $L(X)$ を

$$L(X)s = \left.\frac{d}{dt}\phi_t \cdot s\right|_{t=0}$$

で定義し，これを Xによる s の**リー微分**（Lie derivative）という．とくに $\mathcal{V} = TM$ のとき，リー微分はベクトル場のリー括弧 $L(X)Y = [X, Y]$ で与えられる.

テンソルバンドルのひとつの例は E として**外積代数**（exterior algebra）$\Lambda(\mathbf{R}^n)^*$ をとることによって得られ，これを**外微分**（exterior differential）のバンドルとよび，ΛT^*M で表す.

【定義 2.7】　切断の空間 $\Gamma(M, \Lambda T^*M)$ を**微分形式**（differential form）の空間 $\Omega(M)$ とよぶ．$\Omega(M)$ は**外積**（exterior product）による積をもち

$$\Omega^i(M) = \Gamma(M, \Lambda^i T^*M) \tag{2.8}$$

によって階数づけられた**代数**（graded algebra）の構造をもつ.

M上の微分形式 $\alpha \in \Omega^i(M)$ に対し $i = |\alpha|$ と書いて α の**次数**（degree）とよぶ．このとき，α は**斉次**（homogeneous）であるという.

一般に斉次と限らない α に対し，$\alpha_{[i]}$でその i 次の成分を表す.

微分形式の空間 $\Omega(M) = \bigoplus_i \Omega^i(M)$ は（第 5 章で定義する言葉を先取りしていえば）超可換代数である，すなわち

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{|\alpha||\beta|}\beta \wedge \alpha \tag{2.9}$$

が成り立つ.

【定義 2.8】　**外微分**（exterior differential）d とは，つぎの性質によって一意に定ま

る作用素

$$d : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M) \tag{2.10}$$

のことである．

(1) $d^2 = 0$

(2) $f \in C^\infty(M)$ に対し $df \in \Omega^1(M)$ は，ベクトル場 X に対し $df(X) = X(f)$ となる 1 形式である

(3) d は微分である，すなわち斉次微分形式 α, β に対し

$$d(\alpha \wedge \beta) = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge (d\beta) \tag{2.11}$$

が成り立つ．

定義から，$\alpha \in \Omega^k(M)$ と $X_0, \cdots, X_k \in \Gamma(M, TM)$ に対し

$$\begin{aligned} d\alpha(X_0, \cdots, X_k) &= \sum_{i=0}^{k} (-1)^i X_i(\alpha(X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_k)) \\ &\quad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha\left([X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_k\right) \end{aligned} \tag{2.12}$$

が成り立つ．

$v \in V$ による外積を $v\wedge : \Lambda V \to \Lambda V$ で表す．この**外積作用素**（exterior operator）と双対な作用素 "縮約" をつぎのように定義する．

【定義 2.9】 V をベクトル空間，V^* をその**双対ベクトル空間**（dual vector space）とする．$\alpha \in V^*$ に対し，**縮約作用素**（contraction operator）$\iota(\alpha) : \Lambda V \to \Lambda V$ を

(1) $\iota(\alpha)(v) = \alpha(v), \quad v \in V$

(2) $\iota(\alpha)(v \wedge w) = \iota(\alpha)(v) \wedge w + (-1)^{|p|} v \wedge (\iota(\alpha)w), \quad v \in \Lambda^p V, w \in \Lambda V$

によって定まる作用素と定義する．

とくにVが正定値エルミート計量$(\cdot,\cdot)$をもつとき，同一視$V \to V^*$が$v \to (w \to (w,\ v))$，$v, w \in V$, で与えられ，**縮約**（contraction）$\iota(v) : \Lambda V \to \Lambda V$ が $v \in V$ に対し定義される．

多様体上の微分形式とベクトル場に対し各点で縮約をとることにより，ベクトル場 X による縮約作用素が定義される．これを

$$\iota(X) : \Omega^{\bullet}(M) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(M) \tag{2.13}$$

と書く．

微分形式に対しては，リー微分はつぎの2つの性質を満たす．

$$L(X)d = dL(X)$$
$$L(X)\,(\iota(Y)\alpha) = \iota\,([X,Y])\,\alpha + \iota(Y)\,(L(X)\alpha)$$

これらから，つぎの**カルタンのホモトピー公式**（Cartan's homotopy formula）が導かれる．

$$L(X) = d \cdot \iota(X) + \iota(X) \cdot d$$

とくに α が n 次形式（$n = \dim M$）のとき $L(fX)\alpha = L(X)(f\alpha)$ が任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し成り立つ．

$\phi : M_1 \to M_2$ が多様体の間の微分可能写像であるとき，$\phi^* : \Omega^{\bullet}(M_2) \to \Omega^{\bullet}(M_1)$ を微分形式の引き戻し写像とすれば，ϕ^*は外微分 d と可換である．

【定義 2.10】　$d^2 = 0$ であるから**複体**（complex）

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \tag{2.14}$$

が得られる．この複体$(\Omega(M), d)$を**ドラーム複体**（de Rham complex）とよび，そのコホモロジー群を

$$\begin{aligned} &H^i(\Omega(M), d) \\ &= ker(d : \Omega^i(M) \to \Omega^{i+1}(M))/Im(d : \Omega^{i-1}(M) \to \Omega^i(M)) \end{aligned} \tag{2.15}$$

で定義する．これを $H^i(M)$（または $H^i(M, \mathbf{R})$）で表し，M の**ドラームコホモロジー群**（de Rham cohomology group）とよぶ．

$d\alpha = 0$ のとき α を**閉形式**（closed form）といい，$H^*(M)$ でのその類を $[\alpha]$ で表す．$\alpha = d\beta$ のとき α を**完全形式**（exact form）という．

階数つきベクトル空間 $\sum_{i=0}^{n} H^i(M)$ は積

$$[\alpha_1] \wedge [\alpha_2] = [\alpha_1 \wedge \alpha_2] \tag{2.16}$$

により，階数つき代数になる．

【定義 2.11】 M上のベクトルバンドル $\mathcal{E}$ に対し

$$\Omega^k(M, \mathcal{E}) = \Gamma(M, \Lambda^k T^* M \otimes \mathcal{E}) \tag{2.17}$$

の元を **$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ 値 $\boldsymbol{k}$ 次微分形式**（$\mathcal{E}$-valued differential form）とよぶ．

2.2　接　　続

2.2.1　接続と共変微分

$\mathcal{E}$ を M上のファイバーバンドルとする．$\mathcal{E}$ の接ベクトルでファイバーに接するものを $\mathcal{E}$ 上の**垂直ベクトル**（vertical vector）とよぶ．垂直ベクトル全体の集合は $\mathcal{E}$ 上のベクトルバンドルとなり，これを $V\mathcal{E}$ と表す．$V\mathcal{E}$ は $\mathcal{E}$ の接ベクトルバンドル $T\mathcal{E}$ の部分ベクトルバンドルである．

$\mathcal{E}$ の接バンドル $T\mathcal{E}$ の部分バンドル $V\mathcal{E}$ による**商バンドル**（quotient bundle）は引き戻し π^*TMに同型である．したがって，ベクトルバンドルの短完全系列

$$0 \longrightarrow V\mathcal{E} \longrightarrow T\mathcal{E} \longrightarrow \pi^*TM \longrightarrow 0 \tag{2.18}$$

がある．この短完全系列の標準的な分解は存在しないが，多くの場合にこの短完全系列の分解を与えることが重要になる．このような分解を**接続**（connection）とよぶ．

【定義 2.12】 ファイバーバンドル $\mathcal{E}$ の**接続1形式**（connection 1-form）とは $\omega \in \Omega^1(\mathcal{E}, V\mathcal{E})$ ですべての垂直ベクトル場 Xに対し $\iota(X)\omega = X$となるもののことである．

$\mathcal{E}$ の接続1形式 ω の核を**水平バンドル**（horizontal bundle）とよび $H\mathcal{E}$ と書く．$H\mathcal{E}$ は π^*TM に同型である．M 上のベクトル場 X に対し，$H\mathcal{E}$ の切断 $X^{\mathcal{E}}$ で $\pi_*(X^{\mathcal{E}}) = X$ となるものを，X の**水平もち上げ**（horizontal lift）とよぶ．

ファイバーバンドル $\mathcal{E}$ の接続に対し，その**曲率形式**（curvature form）Ω がバンドル $\Lambda^2\pi^*T^*M \otimes V\mathcal{E}$ の切断としてつぎのように定義される．M 上のベクトル場 X, Y に対し $X^{\mathcal{E}}$, $Y^{\mathcal{E}}$ を水平もち上げとして，

$$\Omega(X,Y) = [X,Y]^{\mathcal{E}} - [X^{\mathcal{E}}, Y^{\mathcal{E}}] \tag{2.19}$$

とおく．すべての $f \in C^\infty(M)$ に対して，$X^{\mathcal{E}}(\pi^* f) = \pi^*(Xf)$ が成り立つことから，

$$\Omega(fX,Y) = (\pi^* f)\Omega(X,Y) \tag{2.20}$$

となる．これより，Ω は M の局所テンソルであることがわかる．

P をリー群 G を構造群とする主バンドル，$\mathbf{g}$ を G のリー環とする．$X \in \mathbf{g}$ とし，P 上の C^∞ 関数 f に対し

$$(X_P f)(p) = \frac{d}{d\varepsilon} f(p \exp \varepsilon X)\Big|_{\varepsilon=0}$$

とおいて P 上のファイバーに沿った接ベクトル場 X_P が定義される．こうして $P \times \mathbf{g}$ から TP への写像が得られ，点 p でのその像は垂直ベクトルのなす部分空間 V_pP である．

VP を $P \times \mathbf{g}$ と同一視することにより，P の接続形式は $\Omega^1(P, \mathbf{g})$ の元であるが，P の接続としてはつぎの定義に与えるように，G の右作用と可換なものだけを考える．

【定義 2.13】 主バンドル P の接続1形式とは，P 上の $\mathbf{g}$ 値1形式 $\omega \in \Omega^1(P, \mathbf{g})$ で $\iota(X_P)\omega = X$, $X \in \mathbf{g}$, を満たすもののことである．

主バンドル P 上に接続をひとつ選べば，すべての随伴バンドル $\mathcal{E} = P \times_G E$ に，水平バンドル $H\mathcal{E}$ を HP の射影 $P \times E \to \mathcal{E}$ による像としてとることにより，接続が定義される．とくに $\mathcal{E}$ がベクトルバンドルのとき，この構成から以下に述べるように共変微分とよばれる $\Omega(M, \mathcal{E})$ 上の微分作用素が得られる．

【定義 2.14】 $\mathcal{E}$ を M上のベクトルバンドルとする．$\mathcal{E}$ 上の**共変微分**（covariant derivative）とは微分作用素

$$\nabla : \Gamma(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E}) \tag{2.21}$$

で，$s \in \Gamma(M, \mathcal{E})$, $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s \tag{2.22}$$

を満たすもののことである．

共変微分 ∇ は $\Omega^0(M, \mathcal{E})$ から $\Omega^1(M, \mathcal{E})$ への写像であるが，写像

$$\nabla : \Omega^\bullet(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Omega^{\bullet+1}(M, \mathcal{E}) \tag{2.23}$$

を，$\alpha \in \Omega^k(M)$, $\theta \in \Omega(M, \mathcal{E})$ に対し

$$\nabla(\alpha \wedge \theta) = d\alpha \wedge \theta + (-1)^k \alpha \wedge \nabla\theta \tag{2.24}$$

を満たすように一意的に拡張する．

M上のベクトル場 X に対し，微分作用素 $\iota(X)\nabla$ を ∇_Xと書き，ベクトル場 X による共変微分とよぶ．これは Xについて線形であり，$\nabla_{fX} = f\nabla_X$を満たす．

$\alpha \in \Omega^k(M, \mathcal{E})$, $X_0, \cdots, X_k \in \Gamma(M, TM)$ に対し

$$\begin{aligned}
&(\nabla\alpha)(X_0, \cdots, X_k) \\
&\quad = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \nabla_{X_i}(\alpha(X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_k)) \\
&\qquad + \sum_{0 \le i < j \le k} (-1)^{i+j} \alpha\left([X_i, X_j], X_0, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_k\right)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

が成り立つ．

ベクトルバンドル $\mathcal{E}$ に 2 つの共変微分 ∇_0, ∇_1があれば，(2.22) から $\nabla_0 - \nabla_1$ は $End(\mathcal{E})$ 値 1 形式となり，したがって，ある $\omega \in \Omega^1(M, End(\mathcal{E}))$ があって，$s \in \Gamma(M, \mathcal{E})$ に対し

$$\nabla_1 s = \nabla_0 s + \omega \cdot s \tag{2.26}$$

となる．

とくに $\mathcal{E}=M\times E$ が自明なバンドルのとき，外微分 d は共変微分であるから，すべての共変微分はある $\omega\in\Omega^1(M,End(E))=\Omega^1(M)\otimes End(\mathcal{E})$ に対し

$$\nabla s=ds+\omega\cdot s \tag{2.27}$$

と表される．この ω を与えられた自明化での ∇ の接続形式という．

任意のバンドル $\mathcal{E}$ は局所自明化をもつので，$\mathcal{E}$ 上の接続は局所的に (2.27) のように表すことができる．

【定義 2.15】 共変微分 ∇ の**曲率**（curvature）とは，2 つのベクトル場 X,Y に対し

$$F(X,Y)=[\nabla_X,\nabla_Y]-\nabla_{[X,Y]} \tag{2.28}$$

で定義される $End(\mathcal{E})$ 値 2 形式である．

微分可能な関数 f に対し

$$[F(X,Y),f]=[\nabla_X,Yf]+[Xf,\nabla_Y]-[X,Y]f=0 \tag{2.29}$$

が成り立ち，$F(X,Y)$ は**局所作用素**（local operator）であることがわかる．

【命題 2.16】 作用素

$$\nabla^2:\Omega^\bullet(M,\mathcal{E})\longrightarrow\Omega^{\bullet+2}(M,\mathcal{E}) \tag{2.30}$$

は，$F\in\Omega^2(M,End(\mathcal{E}))$ の $\Omega(M,E)$ への積による作用に等しい．

$i=1,2$ に対し，$\nabla^{\mathcal{E}_i}$ がベクトルバンドル $\mathcal{E}_i$ 上の共変微分であるとき，$\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2$ 上の共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}$ が $s_i\in\Gamma(M,\mathcal{E}_i)$ に対し

$$\nabla^{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(s_1\otimes s_2)=\nabla^{\mathcal{E}_1}s_1\otimes s_2+s_1\otimes\nabla^{\mathcal{E}_2}s_2$$

として定義される．

また $\mathcal{E}$ 上の共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}}$ に対し，$\mathcal{E}^*$ 上の共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}^*}$ が $s\in\Gamma(M,\mathcal{E})$ と $t\in$

$\Gamma(M,\mathcal{E}^*)$ に対し

$$d < s,t > = < \nabla^{\mathcal{E}} s,t > + < s,\nabla^{\mathcal{E}^*} t >$$

とおいて定義される．

とくにベクトルバンドル $\mathcal{E}$ 上の共変微分 ∇ から $End(\mathcal{E}) = \mathcal{E}^* \otimes \mathcal{E}$ 上の共変微分 $\nabla^{End(\mathcal{E})}$ が得られる．∇ の曲率 $F \in \Omega^2(M, End(\mathcal{E}))$ に対し，

$$\nabla^{End(\mathcal{E})} F = 0$$

が成り立つ．これは左辺が作用素の交換子積 $[\nabla^{End(\mathcal{E})}, \nabla^2]$ に等しいことからただちにわかる．これを**ビアンキ恒等式**（Bianchi identity）とよぶ．

$\phi : N \to M$を微分可能写像，$\mathcal{E}$ を M 上のベクトルバンドルとする．$\nabla^{\mathcal{E}}$が $\mathcal{E}$ の共変微分ならば，$f \in C^\infty(N)$ と $s \in \Gamma(M,\mathcal{E})$ に対し

$$\nabla^{\phi^*\mathcal{E}}(f\phi^* s) = df \otimes \phi^* s + f\phi^*(\nabla^{\mathcal{E}} s) \tag{2.31}$$

とおくことによって，バンドル$\phi^*\mathcal{E}$ の共変微分 $\nabla^{\phi^*\mathcal{E}}$ が定義される．これを共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}}$の**引き戻し**（pull back）とよぶ．

P を G を構造群とする主バンドル，$\mathcal{E} = P \times_G E$ を表現 $\rho : G \to End(E)$ によって与えられる随伴ベクトルバンドルとする．主バンドル P の接続が P 上の1形式 $\omega \in \Omega^1(P, \mathbf{g})$ で与えられているとき，ρ の微分表現 $\rho : \mathbf{g} \to End(E)$ によって $\rho(\omega) \in \Omega^1(P, End(\mathcal{E}))$ が得られる．これから $P \times E$ 上の共変微分が

$$d + \rho(\omega) : C^\infty(P,E) \longrightarrow \Omega^1(P,E)$$

として定義されるが，ω が P 上の G 作用と可換であることから，この微分作用素は $\mathcal{E}$ 上の共変微分を定める．

この対応により，一般にベクトルバンドル $\mathcal{E}$ 上の共変微分は枠バンドル $GL(\mathcal{E})$ の接続と一対一に対応することがわかる．

2.2.2　平行移動と標準自明化

$\gamma(t) : \mathbf{R} \to M$を Mのなめらかな曲線とする．M上のベクトルバンドル$\mathcal{E}$ の共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}}$に対し，$\nabla^{\gamma^*\mathcal{E}}$をその $\gamma^*\mathcal{E}$ への引き戻しとする．

$\dot\gamma(t) \in T_{\gamma(t)}M$を曲線の接ベクトル，$s : \mathbf{R} \to \gamma^*\mathcal{E}$ をなめらかな切断とすれば，

$\nabla^{\mathcal{E}}_{\dot\gamma(t)}s(t)$ が

$$\nabla^{\mathcal{E}}_{\dot\gamma(t)}s(t) = \nabla^{\gamma^*\mathcal{E}}(s)(t) \tag{2.32}$$

として定義される．

とくに $\mathcal{E}$ が自明なバンドル $M \times E$ で $\nabla^{\mathcal{E}} = d+\omega$ ならば，$s(t) = (\gamma(t), f(t))$，$f : \mathbf{R} \to E$, と表され

$$\nabla^{E}_{\dot\gamma(t)}s(t) = \left(\gamma(t), \frac{df(t)}{dt} + \omega(\dot\gamma(t))f(t)\right) \tag{2.33}$$

となる．

【定義 2.17】 $\gamma(t)$ に沿う**平行移動**（parallel transport）

$$\tau_\gamma(t) \in Hom(E_{\gamma(0)}, E_{\gamma(1)}) \tag{2.34}$$

は常微分方程式

$$\nabla^{E}_{\dot\gamma(t)}\tau_\gamma(t) = 0 \tag{2.35}$$

の解で，初期条件 $\tau_\gamma(0) = I$ を満たすものとして定義される．

とくに $\mathbf{R}^n$の開球体上のベクトルバンドルの接続について考えよう．Uを $\mathbf{R}^n$の開球体，$\mathcal{E}$ を接続 ∇ をもつU上のベクトルバンドルとする．

x_i を Uの座標，∂_i を対応する偏微分作用素とし，

$$\Re = \sum_i x_i\partial_i \tag{2.36}$$

を U上の**動径ベクトル場**（radial vector field）とする．

常微分方程式の理論からつぎの結果が得られる．

【命題 2.18】 $x \in U$に対し，原点からでる半直線 $t \to tx$ に沿う平行移動は，ファイバー $\mathcal{E}_x$を $E = \mathcal{E}_0$と同一視することによって，$\mathcal{E}$ の U上の自明化を与える．

この自明化において，$\mathcal{E}$ の接続 1 形式は $End(E)$ 値 1 形式

$$\omega = \sum\nolimits_i \omega_i dx_i \tag{2.37}$$

で $\nabla = d + \omega$ を満たすものであり，$\mathcal{E}$ の曲率は

$$F = d\omega + \omega \wedge \omega \tag{2.38}$$

で定義される $End(E)$ 値2形式である．また $\iota(\Re)\omega = 0$ であり，接続1形式 ω の動径微分について

$$L(\Re)\omega = [\iota(\Re), d]\omega = \iota(\Re)(d\omega + \omega \wedge \omega) = \iota(\Re)F \tag{2.39}$$

が成り立つ．

$\mathcal{E}$ のこの自明化の有用な性質は，ω_i の原点0でのテイラー展開の係数が F の原点0でのテイラー展開の係数によって決まることである．

【命題 2.19】 上の自明化で $\nabla = d + \omega$, $\omega = \sum_i \omega_i dx_i$ とする．ω_i の $x_{(0)} = 0$ でのテイラー展開は

$$\omega_i(x) \sim -\frac{1}{2}\sum_j F(\partial_i, \partial_j)_{x_{(0)}} x_j + \sum_{|\alpha| \geq 2} \partial^\alpha \omega_i(x_{(0)}) \frac{x^\alpha}{\alpha!} \tag{2.40}$$

の形をもつ．ただし $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は非負整数の n 組を表し，$|\alpha| = \sum_j \alpha_j$, $\partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}$ かつ $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ である．

証明 (2.39) の両辺のテイラー展開をとって，

$$\sum_\alpha (|\alpha| + 1)\partial^\alpha \omega_l(x_{(0)}) x^\alpha / \alpha! = \sum_{\alpha, k} \partial^\alpha F(\partial_k, \partial_l)_{x_{(0)}} x_k x^\alpha / \alpha! \tag{2.41}$$

を得る．両辺の x^α の係数を等しいとおけば，

$$\partial_j \omega_i(x_{(0)}) = -\frac{1}{2} F(\partial_i, \partial_j)_{x_{(0)}} \tag{2.42}$$

がわかる．さらに，ω_i の $x_{(0)}$ での位数 m までのテイラー係数は $F(\partial_i, \partial_j)$ の位数 $m-1$ までのテイラー係数にのみよっていることがわかる． ■

2.3 計量と密度

2.3.1 ベクトルバンドルの計量

ベクトルバンドルの**計量**（metric）とは$\mathcal{E}$の各ファイバー上の非退化内積（non-degenerate inner product）のなめらかな族のことである．$\mathcal{E}$が階数Nの実ベクトルバンドルならば，これは$\mathcal{E}$がある$O(N)$主バンドルPに付随する標準表現$\mathbf{R}^N$をファイバーとするバンドルであることにほかならない．実際Pは$\mathcal{E}$の**正規直交枠**（orthonormal frame）全体のなすバンドル$O(\mathcal{E})$としてよい．

同様のことが複素ベクトルバンドルに対しても，$O(N)$をユニタリ群$U(N)$に置き換えて成り立つ．計量実ベクトルバンドルを**ユークリッドベクトルバンドル**（Euclidean vector bundle），計量複素ベクトルバンドルを**エルミートベクトルバンドル**（Hermitian vector bundle）とよぶ．

共変微分∇が計量を保つとは，$s_i \in \Gamma(M,\mathcal{E})$に対し，

$$d(s_1, s_2) = (\nabla s_1, s_2) + (s_1, \nabla s_2) \tag{2.43}$$

が成り立つことである．ここで$(\cdot,\cdot)$は計量による内積を表す．

∇が計量を保てば，その曲率$F_x(X,Y)$は$\mathcal{E}_x$の**歪対称**（交代，skew-symmetric）自己準同型写像のリー代数$so(\mathcal{E}_x)$に属する．

共変微分∇が計量を保つことと，平行移動写像が計量を保つことは同値である．なぜならば，

$$\frac{d}{dt}\|\tau_\gamma(t)s\|^2 = 2\left(\tau_\gamma(t)s, \nabla^{\mathcal{E}}_{\dot\gamma(t)}\tau_\gamma(t)s\right) = 0 \tag{2.44}$$

が成り立つからである．ただし$\|\tau_\gamma(t)s\|^2 = (\tau_\gamma(t)s, \tau_\gamma(t)s)$である．このことから，命題 2.18 の自明化は$\mathcal{E}$のファイバーの計量と両立していることがわかる．

ゆえにe_aが$E = \mathcal{E}_0$の**正規直交基底**（orthonormal basis）ならば，Uの各点で正規直交基底をなすなめらかな切断が得られ，これをやはりe_aと書いて**正規直交枠**（orthonormal frame）とよぶ．

$\pi : \mathcal{E} \to M$をM上のベクトルバンドルとする．$\mathcal{E}$の共変微分$\nabla^{\mathcal{E}}$は$GL(\mathcal{E})$上の接続を決め，したがって全空間$\mathcal{E}$上の接続，すなわち分解

$$T\mathcal{E} = V\mathcal{E} \oplus H\mathcal{E} \tag{2.45}$$

を決める．バンドル$V\mathcal{E}$は$\pi^*\mathcal{E}$に同型である．$\theta \in \Omega^1(\mathcal{E}, V\mathcal{E})$によってこの接続

の接続1形式を表す．

【定義 2.20】 $\mathcal{E}$ がベクトルバンドルのとき，$v \in \mathcal{E}$ に (v,v) を対応させれば，これは $\pi^*\mathcal{E}$ のなめらかな切断である．この切断 $\mathbf{x} \in \Gamma(\mathcal{E}, \pi^*\mathcal{E})$ を**トートロジカル切断**（tautological section）とよぶ．

【命題 2.21】 $\mathcal{E}$ を共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}}$ をもつベクトルバンドルとする．$\nabla^{\mathcal{E}}$ の $\pi^*\mathcal{E}$ への引き戻しを $\nabla^{\pi^*\mathcal{E}}$ とする．θ を $\Omega^1(\mathcal{E}, \pi^*\mathcal{E})$ の元と考えて，

$$\theta = \nabla^{\pi^*\mathcal{E}}\mathbf{x} \tag{2.46}$$

が成り立つ．

証明　局所的に $\mathcal{E}$ は自明化できるので，$\mathcal{E} = M \times E$, $\nabla = d + \omega$ としてよい．$\mathcal{E}$ の点を $(x,v) \in M \times E$ で表せば，$\mathbf{x}(x,v) = v$, $\nabla^{\pi^*\mathcal{E}}\mathbf{x} = dv + \omega v$ となる．ゆえに，

$$\nabla^{\pi^*\mathcal{E}}_{(X,V)}\mathbf{x} = V + \omega(X)v \tag{2.47}$$

である．枠バンドル $GL(\mathcal{E})$ は点 $(x,g) \in GL(\mathcal{E}) = M \times GL(E)$ で接ベクトル $(X,A) \in T_{(x,g)}GL(\mathcal{E}) = T_xM \times gl(E)$ をもつ．(x,g) での水平接空間は

$$H_{(x,g)}GL(\mathcal{E}) = \{(X, -\omega(X)) \mid X \in T_xM\} \tag{2.48}$$

である．$GL(\mathcal{E}) \times \mathcal{E}$ から $\mathcal{E}$ への写像 $((x,g),v) \to (x,gv)$ による $H_{(x,e)}GL(\mathcal{E})$ の像は

$$H_{(x,v)}GL(\mathcal{E}) = \{(X, -\omega(X)v) \mid X \in T_xM\} \tag{2.49}$$

である．$\nabla^{\pi^*\mathcal{E}}\mathbf{x}$ はこの空間の上で消え，また

$$\nabla^{\pi^*\mathcal{E}}_{(0,V)}\mathbf{x} = V \tag{2.50}$$

を満たすので，それは θ に等しい．■

2.3.2　TM 上の接続

接バンドル TM 上の接続を調べよう．これらはしばしば**アフィン接続**（affine connection）とよばれる．

【定義 2.22】 Mの基本1形式（fundamental 1-form）θ とは $\Omega^1(M, TM)$ の元で

$$\iota(X)\theta = X \qquad (X \in TM)$$

を満たすもののことである．∇ が TM の接続のとき，微分形式 $T = \nabla\theta \in \Omega^2(M, TM)$ を ∇ の**トーション**〔ねじれ（torsion)〕とよぶ．$T = 0$ のとき，∇ はトーションなしとよばれる．

X,Yが Mの2つのベクトル場であるとき，$T(X,Y) \in \Gamma(M, TM)$ は

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \tag{2.51}$$

で与えられる．

TM上の接続は $GL(M)$ に付随したすべてのベクトルバンドル，とくに ΛT^*M に接続を定める．この接続はすべての斉次微分形式 α, β とベクトル場 X に対し，

$$\nabla_X(\alpha \wedge \beta) = \nabla_X\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \nabla_X\beta \tag{2.52}$$

を満たす．α が k 形式，$X, Y_1, \cdots, Y_k$ がベクトル場ならば，

$$X \cdot \alpha(Y_1, \cdots, Y_k) = (\nabla_X\alpha)(Y_1, \cdots, Y_k) + \sum_{i=1}^{k} \alpha(Y_1, \cdots, \nabla_X Y_i, \cdots, Y_k) \tag{2.53}$$

が成り立つ．

$$\wedge : T^*M \otimes \Lambda^\bullet T^*M \longrightarrow \Lambda^{\bullet+1}T^*M \tag{2.54}$$

を外積による写像とする．

【命題 2.23】 ∇ がTMのトーションをもたない接続のとき，外微分は結合

$$\Gamma(M, \Lambda T^*M) \xrightarrow{\nabla} \Gamma(M, T^*M \otimes \Lambda T^*M) \xrightarrow{\wedge} \Gamma(M, \Lambda^{\bullet+1}T^*M) \tag{2.55}$$

に等しい．

証明 (2.55) によって与えられる作用素を D で表す．∇ は**ライプニッツ規則**（Leipnitz rule）を満たすので，

$$D(\alpha\beta) = D\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge D\beta \tag{2.56}$$

が成り立つ．この式によって，命題を証明するには D が関数と 1 形式に対して d と一致することをいえば十分である．

関数に対しては定義より明らかである．$T \in \Omega^2(M,TM)$ をアフィン接続 ∇ のトーションとすれば，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$D^2 f = D(df) = -\langle T, df\rangle \in \Omega^2(M) \tag{2.57}$$

が成り立つことを証明する（ただし $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は TM と T^*M の間の対（縮約）である）．これがいえれば，T が消えるとき D は 1 形式の上で d と一致することがわかる．

M の局所座標系をとって dx_i , $X_i = \partial/\partial x_i$ をそれぞれ余接バンドル，接バンドルの対応する枠とする．X_i 方向への共変微分を ∇_iで表せば，D は

$$D = \sum_i dx_i \wedge \nabla_i \tag{2.58}$$

で与えられる．ゆえに $D(df)$ は

$$\sum_{ij} dx_i \wedge \nabla_i(\partial_j f dx_j) = \sum_{ij} dx_i \wedge \partial_j f \nabla_i dx_j \tag{2.59}$$

に等しい．ライプニッツ規則から，

$$0 = \nabla_i \langle dx_j, X_k\rangle = \langle \nabla_i dx_j, X_k\rangle + \langle dx_j, \nabla_i X_k\rangle \tag{2.60}$$

であり，したがって

$$\begin{aligned} D(df) &= -\sum_{ijk} dx_i dx_k \wedge \partial_j f \langle dx_j, \nabla_i X_k\rangle \\ &= -\sum_{i<k} dx_i dx_k \wedge \langle df, T(X_i, X_k)\rangle \end{aligned} \tag{2.61}$$

となり (2.57) が証明された． ■

2.3.3 密　　度

M が次元 n の多様体であるとき，主バンドル $GL(M)$ に付随するベクトルバンドルのもうひとつの例として，密度バンドルとよばれるものをあげよう．

実数 s に対し，$GL(n,\mathbf{R})$ の指標（$\mathbf{R}^* = \mathbf{R} - \{0\}$ への 1 次元表現）

$$A \longrightarrow |\det(A)|^{-s}$$

を用いて $GL(M)$ に付随するベクトルバンドルをつくり，これを $|\Omega|^s$と表して M の s **密度のバンドル**（density bundle）とよぶ．

$|\Omega|^s$のファイバー $|\Omega|^s_x$ の元は，関数 $\psi : \Lambda^n T_x M - \{0\} \to \mathbf{R}$ で $\lambda \neq 0$ に対し，$\psi(\lambda X) = |\lambda|^s \psi(X)$ を満たすものである．Uが $\mathbf{R}^n$の開集合のとき，$|dx|^s$で

$$|dx|^s (\partial_1 \wedge \cdots \wedge \partial_n) = 1 \tag{2.62}$$

で特徴づけられる s 密度を表す．ただし，∂_i は i 番目の座標方向への微分に対応するベクトル場 $\partial/\partial x_i$ を表す．1の分解を使って，$|\Omega|^s$のいたるところ零にならない切断をつくることができ，したがって $|\Omega|^s$は自明なバンドルである．

1密度のバンドル $|\Omega| = |\Omega|^1$を単に密度のバンドルとよぶ．また $|\Omega|^{1/2}$を**半密度**（half density）のバンドルとよぶ．

【命題 2.24】 Mを次元 n の多様体とする．積分とよばれる微分同相のもとで不変な線形形式

$$\int_M : \Gamma_c(M, |\Omega|) \longrightarrow \mathbf{R} \tag{2.63}$$

が一意的に存在し，局所座標系でルベーグ積分と一致する．

$$\int_M f(x)\,|dx| = \int_{\mathbf{R}^n} f(x) dx_1 \cdots dx_n \tag{2.64}$$

2.1.2 項に述べた微分形式のリー微分に関するカルタンのホモトピー公式から，Mのベクトル場 Xとコンパクト台をもつ C^1 密度 α に対し

$$\int_M L(X)\alpha = 0 \tag{2.65}$$

が成り立つことがわかる．

$\alpha \in \Gamma(M, |\Omega|)$ に対し，$L(fX)\alpha = fL(X)\alpha + X(f)\alpha$ が成り立つので，$\beta \in \Gamma(M, |\Omega|^{1/2})$ を Mの半密度とすれば，

$$L(fX)\beta = fL(X)\beta + \frac{1}{2}X(f)\beta \tag{2.66}$$

である．

密度のバンドル $|\Omega|$ は**体積形式**（volume form）のバンドル $\Lambda^n T^*M$と密接な関係にある．前者は $GL(n,\mathbf{R})$ の指標 $|\det(A)|^{-1}$ に対応し，後者は指標 $\det(A)^{-1}$ に対応する．

$|\Omega|$ と違って，直線バンドル $\Lambda^n T^*M$ は M が向きづけ可能なとき，またそのときに限り自明である．M が向きづけ可能ならば，枠バンドル $GL(M)$ は2つの連結成分をもつ．Mの向きづけとはこのうちの1つの成分を選ぶことにあたり，それは正の行列式をもつ行列の群 $GL^+(n)$ の主バンドルである．選ばれた成分 $GL^+(M)$ の枠を**向きづけられた枠**（oriented frame）とよぶ．

Mの向きづけは $\Lambda^n T^*M$と $|\Omega|$ の同型を選ぶことと同値である．$v \in \Omega^n(M)$ が Mの体積形式ならば，対応する密度 $|v|$ は向きづけられた $X \in \Lambda^n T_x M$ に対し $|v|(X) = v(X)$ を満たす．

向きづけられた n 次元多様体 Mとその上のコンパクト台をもつ微分形式 $\alpha \in \Omega_c(M)$ に対し，$\alpha_{[n]}$ をその n 次成分とする．α の M上での積分を $\alpha_{[n]}$ に対応する密度 $\left|\alpha_{[n]}\right|$ を用いて，

$$\int_M \alpha = \int_M \left|\alpha_{[n]}\right| \tag{2.67}$$

で定義する．

2.4　リーマン多様体

2.4.1　リーマン構造

n 次元多様体 M の**リーマン構造**（Riemannian structure）とは接バンドル TM の計量のことである．リーマン構造を用いて正規直交枠バンドル $O(M)$ が $\{e_1,\cdots,e_n\}$ を T_xMの正規直交基底として

$$O(M) = \{(x,(e_1,\cdots,e_n))\} \tag{2.68}$$

で定義される．$\pi : O(M) \to M$ を射影とする．$O(M)$ は $O(n)$ 主バンドルであり，TMはその随伴バンドルである．

$$TM = O(M) \times_{O(n)} \mathbf{R}^n \tag{2.69}$$

さらに M が向きづけられているとき，向きづけられた正規直交枠バンドル $SO(M)$

は $SO(n)$ 主バンドルである.

【定義 2.25】 リーマン多様体 M の接バンドル TM は**レビ–チビタ接続**（Levi-Civita connection）とよばれる標準的な接続をもち，2 つのベクトル場 X, Y に対し，

$$d(X,Y) = (\nabla X, Y) + (X, \nabla Y)$$
$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \tag{2.70}$$

を満たす．ここに $(\cdot,\cdot)$ はリーマン計量による内積を表す．この 2 つの式からレビ–チビタ共変微分は

$$2(\nabla_X Y, Z) = ([X,Y],Z) - ([Y,Z],X) + ([Z,X],Y) + X(Y,Z) + Y(Z,X) - Z(X,Y) \tag{2.71}$$

により与えられることがわかる．

各 $x \in M$ で内積空間 T_xM の反対称自己同型写像全体のなすリー代数をファイバーとするバンドルを $so(TM) = O(M) \times_{O(n)} so(n)$ とする．レビ–チビタ接続の曲率は M 上の $so(TM)$ 値 2 形式であり，**リーマン曲率**（Riemannian curvature）とよばれ，$R \in \Omega^2(M, so(TM))$ で表される．すなわち X, Y, Z を M のベクトル場とするとき，

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.72}$$

である．X, Y が M のベクトル場であるとき，$R(X,Y)$ で 2 形式 R を X, Y で縮約した $so(TM)$ の切断を表し，また (RX, Y) で曲率の $so(TM)$ 部分を縮約して得られる 2 形式を表す．

【命題 2.26】 X, Y, Z と W を M のベクトル場とする．つぎが成り立つ．

(1) $R(X,Y) = -R(Y,X)$

(2) $(R(W,X)Y, Z) + (Y, R(W,X)Z) = 0$

(3) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$

(4)　$(R(W,X)Y,Z) = (R(Y,Z)W,X)$

証明　(1) は R が 2 形式，(2) は $R_x(W,X) \in so(T_xM)$ であることをいっている．(3) を証明しよう．

$$\nabla_X[Y,Z] = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_X\nabla_Z Y \tag{2.73}$$

であり，この式を 3 つのベクトル X, Y, Z に関して巡回して得られる 3 つの式を足し合わせることにより，

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y Z + \nabla_Y\nabla_Z X + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_X\nabla_Z Y \\ = \nabla_X[Y,Z] + \nabla_Y[Z,X] + \nabla_Z[X,Y]\end{aligned} \tag{2.74}$$

が得られる．これは (3) と同値である．(4) は (1),(2) および (3) から容易に証明できる．■

接ベクトルバンドルの枠 X_iとその双対枠 X^i が与えられたとき，曲率行列の成分を

$$R^i_{jkl} = \left\langle R(X_k,X_l)X_j, X^i \right\rangle \tag{2.75}$$

の形で書くことができる．ここに $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は枠と双対枠の対を表し，i,j は R が $End(TM)$ に値をもつことに対応し，k,l は 2 形式の添字である．

計量を用いて

$$R_{ijkl} = (R(X_k,X_l)X_j, X_i) \tag{2.76}$$

と定義する．成分 R_{ijkl} は $R_{ijkl} = R_{klij}$ を満たす．

e_i が TMの正規直交枠でその双対枠を e^iとすれば，2 形式 (Re_i,e_j) は

$$(Re_i,e_j) = -\sum_{k<l} R_{ijkl}e^k \wedge e^l \tag{2.77}$$

で与えられる．曲率テンソルから対称テンソル

$$Ric_{ij} = \sum_k R_{ikjk} \in \Gamma(M, S^2(TM)) \tag{2.78}$$

をつくり，これを**リッチテンソル**（Ricci tensor）とよぶ．またそのトレース

$$r = \sum_{lm} R_{lmlm} \tag{2.79}$$

は**スカラー曲率**（scalar curvature）とよばれる．

リーマン多様体に対してはリーマン計量から自然な密度が定義される．

【定義 2.27】 n 次元リーマン多様体 M の**リーマン密度**（Riemannian density）$|v_M| \in \Gamma(M, |\Omega|)$ を

$$|v_M|(e_1 \wedge \cdots \wedge e_n) = 1$$

で定義する．ただし $\{e_i\}$ は TM の正規直交基底である．

$|v_M|$ の存在は，直線バンドル $|\Omega|$ を定義するのに用いた $GL(n)$ の指標 $|\det|$ が構造群 $O(n)$ 上自明であり，したがってリーマン多様体の密度バンドルが $M \times \mathbf{R}$ と同型であることによっている．このことから同時に $|v_M|$ がレビ–チビタ接続で平行であることもわかる．

【定義 2.28】 f がリーマン多様体 M 上の微分可能関数のとき，f の勾配ベクトル場 $grad\,f$ をすべてのベクトル場 X に対して

$$(grad\,f, X) = Xf \tag{2.80}$$

を満たすものとして定義する．

リーマン多様体上のなめらかな道 $x_{(t)} : [0,1] \to M$ とは，ある $\varepsilon > 0$ に対するなめらかな写像 $x_{(t)} : (-\varepsilon, 1+\varepsilon) \to M$ の $[0,1]$ への制限になっているもののことである．$x_{(t)}$ がこのような道であるとき，その長さを

$$L(x) = \int_0^1 \sqrt{(\dot{x}_{(t)}, \dot{x}_{(t)})}dt$$

で定義する．ただし $\dot{x}_{(x)} \in T_{x_{(t)}}$ は t での道 $x_{(t)}$ の接ベクトルである．2つの点の間のリーマン距離 $d(x_{(0)}, x_{(1)})$ を，これらを結ぶなめらかな道全体にわたってとった長さの下限として定義する．

2.4.2　測地線と正規座標系

【定義 2.29】　微分可能な道，$x_{(t)} : [0,1] \to M$ が**測地線**（geodesic）であるとは微分方程式

$$\nabla_{\dot{x}_{(t)}} \dot{x}_{(t)} = 0 \tag{2.81}$$

を満たすことをいう．

測地線の方程式は初期値 $x_{(0)}$ とその点での微分 $x = \dot{x}_{(0)} \in T_{x_{(0)}}M$ が与えられたとき，小さい t に対し一意的に解をもつ．その終点 $x_{(1)}$ を $x_{(0)}$ でのベクトル x の**指数写像**（exponential map）による像といって $\exp_{x_{(0)}} x$ で表す．これは十分小さい $x \in T_{x_{(0)}}M$ に対し定義される．

指数写像の $x_{(0)}$ での微分 $d\exp_{x_{(0)}}$ は $T_{x_{(0)}}M$ の恒等写像である．ゆえに逆関数の定理から，指数写像は $T_{x_{(0)}}M$ の原点を中心とする小さい球体から $x_{(0)}$ の M での近傍への微分同相写像となっている．このような球体の半径の上限を $x_{(0)}$ での**単射半径**（injectivity radius）とよぶ．

【定義 2.30】　指数写像は $x_{(0)}$ のまわりの座標系を与える．これを**正規座標系**（normal coordinate）とよぶ．

この座標系の重要な性質は $T_{x_{(0)}}M$ の原点からでる直線が M の測地線に写されることである．

指数写像による計量と共変微分の引き戻しに関する公式を与えよう．

ベクトル空間 $T_{x_{(0)}}M$ は点 $x_{(0)}$ でのリーマン計量による正定値内積をもつ．この内積によるベクトル $x \in T_{x_{(0)}}M$ のノルムを $\|x\|$ で表す．

接ベクトル空間 $T_{x_{(0)}}M$ の正規直交枠をとり，それに関する座標を x_i，対応する偏微分を ∂_i とする．∂_i は $x_{(0)}$ で正規直交であるが一般に他の点ではそうではない．この座標系において点 $x_{(0)}$ は座標 $x = 0$ をもつ．

$\Re = \sum_{i=1}^{n} x_i \partial_i$ を動径ベクトル場とする．e_i をこの座標系による自明化から得られる TM の正規直交枠とする．$e_i = \partial_i + O(\|x\|)$ であり，$\nabla_{\Re} e_i = 0$ である．

【命題 2.31】 正規座標系においてつぎの式が成り立つ．

(1) $\nabla_{\Re}\Re = \Re$

(2) $\Re = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ ，したがって $(\Re, \Re) = \|x\|^2$

(3) $(\Re, \partial_i) = x_i$

(4) $d(x_{(0)}, \exp_{x_{(0)}} x) = \|x\|$

証明　(i) 正規座標系において曲線 $x_{(t)} = tx$ は測地線である．$\Re(x_{(t)}) = t\dot{x}_{(t)}$ であるから，測地線の方程式によって

$$\nabla_{\Re}\Re = t\nabla_{\dot{x}_{(t)}}(t\dot{x}_{(t)}) = t\dot{x}_{(t)} = \Re \tag{2.82}$$

となる．

(ii) $(\Re, e_i)$ をベクトル場 $\Re$ について微分すれば

$$\Re(\Re, e_i) = (\nabla_{\Re}\Re, e_i) + (\Re, \nabla_{\Re} e_i) = (\Re, e_i) \tag{2.83}$$

となり，ゆえに $(\Re, e_i)$ は斉次一次である．

$$(\Re, e_i) = \sum_j x_j(\partial_j, e_i) = x_i + O(\|x\|^2) \tag{2.84}$$

から (2) が得られる．

(iii) 関数 $(\Re, \partial_i)$ は $\sum_j x_j(\partial_j, \partial_i)$ に等しく，$x_i + O(\|x\|^2)$ である．他方

$$\Re(\Re, \partial_i) = (\nabla_{\Re}\Re, \partial_i) + (\Re, \nabla_{\Re}\partial_i) \tag{2.85}$$

であり，$[\Re, \partial_i] = -\partial_i$ であるから

$$\begin{aligned}(\Re, \nabla_{\Re}\partial_i) &= (\Re, \nabla_{\partial_i}\Re) + (\Re, [\Re, \partial_i]) \\ &= \frac{1}{2}\partial_i \|\Re\|^2 - (\Re, \partial_i)\end{aligned} \tag{2.86}$$

が得られる．これらから

$$\Re(\Re, \partial_i) = \frac{1}{2}\partial_i \|\Re\|^2 = x_i \tag{2.87}$$

が得られ (3) がでる．

(iv) 式 (3) は $\mathfrak{R}$ がベクトル場 $x_i\partial_j - x_j\partial_i$ に，リーマン計量に関して直交していることを示している．$x_{(t)}$ $(0 \le t \le 1)$ を 0 から x への任意の曲線とし，その接ベクトル $\dot{x}_{(t)}$ を，$\mathfrak{R}$ のスカラー倍とベクトル場 $x_i\partial_j - x_j\partial_i$ によって張られる等距離球面に接した超平面内のベクトルの和に分解する．これにより

$$\left\|\dot{x}_{(t)}\right\| \ge \left|\frac{d\left\|x_{(t)}\right\|}{dt}\right| \tag{2.88}$$

が得られる．ゆえに，曲線 $x_{(t)}$ の長さは $\|x\|$ に等しいかそれより大きい．曲線 $x_{(t)} = tx$ の長さは $\|x\|$ に等しいので (4) を得る．■

正規座標系の重要な性質は，つぎの命題で示されるように原点 $x_{(0)}$ の近傍で計量 $(\partial_i, \partial_j)_x$ が 2 次のオーダーまでクロネッカー δ_{ij}（Kronecker delta）と一致することである．

【命題 2.32】 関数 $(\partial_i, \partial_j)_x = g_{ij}(x)$ の正規座標における $x_{(0)}$ でのテイラー展開はつぎの形をもつ．

$$g_{ij} \sim \delta_{ij} - \frac{1}{3}\sum_{kl} R_{ikjl}(x_{(0)})x_k x_l + \sum_{|\alpha|\ge 3}(\partial^\alpha g_{ij})(x_{(0)})\frac{x^\alpha}{\alpha!} \tag{2.89}$$

証明　行列 θ_{ij} を

$$\partial_i = \sum_j \theta_{ij} e_j \tag{2.90}$$

で定義する．枠 e_j に関して基本 1 形式

$$\theta = \sum_i dx_i \partial_i \in \Omega^1(M, TM) \tag{2.91}$$

は $\theta_j = \sum_i \theta_{ij} dx_i$ とすれば $\sum_j \theta_j e_j$ に等しい．

ω を枠 e_j に関するレビ–チビタ接続の $End(\mathbf{R}^n)$ 値 1 形式とする．レビ–チビタ接続はトーションをもたないので，$\mathbf{R}^n$ 値 1 形式 $\theta = (\theta_j)$ は構造方程式

$$d\theta + \omega \wedge \theta = 0 \tag{2.92}$$

を満たす．命題 2.31 の (2) から $\mathfrak{R} = \sum x_i e_i$ であるから

$$\iota(\Re)\theta = \Re = (x_1, \cdots, x_n) \tag{2.93}$$

となる．

$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$ を M の正規座表に関する曲率形式とすれば，(2.39) と同様に

$$L(\Re)\omega = \iota(\Re)\Omega \tag{2.94}$$

が成り立つ．式 $\iota(\Re)\omega = 0$, $(L(\Re) - 1)x = 0$ を恒等式 $\iota(\Re)(d\theta + \omega \wedge \theta) = 0$ に代入して

$$(L(\Re) - 1)L(\Re)\theta = (L(\Re)\omega)x = (\iota(\Re)\Omega)x \tag{2.95}$$

を得る．ここに曲率 Ω は 2 形式の行列，Ωx は 2 形式のベクトルと見なす．$\Re = \sum x_i e_i$ をふたたび用いて，

$$\iota(\partial_k)(L(\Re) - 1)L(\Re)\theta^a = \sum_{ij} x_i x_j (\Omega(\partial_i, \partial_k)\partial_j, e_a) \tag{2.96}$$

を得る．e_j は ∂_i の関数として行列 θ_{ij} の逆で表され，$\theta_{ij}(x_{(0)}) = \delta_{ij}$ である．

(2.94) から，θ_{ab} の位数 m までのテイラー展開項は，曲率係数 $R_{ijkl} = (\Omega(\partial_k, \partial_l)\partial_j, \partial_i)_x$ の位数 $m-2$ までのテイラー展開項によって決定されることがわかる．とくに 1 次の項は 0 で，2 次の項は (2.96) から

$$\theta_{ab} = \delta_{ba} - \frac{1}{6}\sum_{i,j} x_i x_j R_{jbia} + O(\|x\|^3) \tag{2.97}$$

となる．Mの計量は 1 形式 θ によって，

$$g_{ij}(x) = \sum_k \theta_{ki}\theta_{kj} \tag{2.98}$$

と表され，g_{ij} のテイラー係数は θ のテイラー係数によって表される． ■

指数写像 $\exp_{x_{(0)}} : T_{x_{(0)}}M \to M$の $x \in T_{x_{(0)}}M$ での微分 $d_x \exp_{x_{(0)}}$は，$y = \exp_{x_{(0)}} x$ とすれば $T_{x_{(0)}}M$ から T_yM への写像である．$T_{x_{(0)}}M, T_yM$ はともに計量空間であるからそのヤコビアン

$$j(x) = \left|\det(d_x \exp_{x_{(0)}})\right| \tag{2.99}$$

が定義されている．定義により，e_i が T_yM の枠で $\partial_i = \sum_k \theta_{ij} e_j$ ならば，$j(x) = |\det(\theta_{ij})|$ であり

$$j(x) = |\det(g_{ij}(x))|^{1/2} \tag{2.100}$$

が成り立つ．

3

特　性　類

この章で特性類の解説をする．3.1 節から 3.4 節まででチャーン（Chern）による曲率を用いた特性類（characteristic class）の定義をし，3.8 節と 3.9 節で位相幾何学の障害理論（obstruction theory）に従って，特性類の幾何学的性質をポアンカレ双対定理（Poincaré duality）との関連で述べる．これがもともとの特性類の原形である．

3.1　チャーン・ヴェイユ準同型写像

【定義 3.1】 複素一般線形群 $GL(n,\mathbf{C})$，実一般線形群 $GL(n,\mathbf{R})$，ユニタリ群 $U(n)$，直交群 $O(n)$ および特殊直交群 $SO(n)$ のリー環をそれぞれ

$$\begin{aligned} gl(n,\mathbf{C}) &= End(\mathbf{C}^n) \\ gl(n,\mathbf{R}) &= End(\mathbf{R}^n) \\ u(n) &= \{A \in gl(n,\mathbf{C}) \mid A + A^* = 0\} \\ o(n) &= \{A \in gl(n,\mathbf{R}) \mid A +^t A = 0\} \\ so(n) &= o(n) \end{aligned} \tag{3.1}$$

とする．$u(n)$ の元を歪随伴（skew-adjoint）行列，$o(n)$ の元を歪対称（交代，skew-symmetric）行列とよぶ．

この節では G を上の (3.1) のうちのいずれかのリー群とし，$\mathbf{g}$ をそのリー代数とする．リー群 G のリー環 $\mathbf{g}$ への随伴作用を，$A \in \mathbf{g}$，$g \in G$ に対し，$A \to gAg^{-1}$

と表す.

$f:\mathbf{g}\to\mathbf{C}$ を複素数値多項式写像とする．不変多項式のなす代数を

$$\mathcal{P}(G)=\{f \mid f(gAg^{-1})=f(A),\ g\in G,\ A\in\mathbf{g}\} \tag{3.2}$$

とする．$\mathcal{P}(G)$ は，次数 j の斉次**不変多項式**（invariant polynomial）のなす空間 $\mathcal{P}(G)_j$ の直和

$$\mathcal{P}(G)=\bigoplus_j \mathcal{P}(G)_j \tag{3.3}$$

に分解される.

【定義 3.2】　j 次斉次不変多項式 $f\in\mathcal{P}(G)_j$ に対し

$$f(t_1A_1+\cdots+t_jA_j)/j!=\sum_\alpha t^\alpha f_\alpha(A_1,\cdots,A_j) \tag{3.4}$$

とする．ただし $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_j)$ に対し $t^\alpha=t_1^{\alpha_1}\cdots t_j^{\alpha_j}$ である．$\alpha=(1,\cdots,1)$ に対し

$$f(A_1,\cdots,A_j)=f_\alpha(A_1,\cdots,A_j) \tag{3.5}$$

とおき，これを f の**極化形式**（polarization）とよぶ.

f の極化形式は**対称多重線形多項式**（symmetric multi-linear polynomial）であり，

$$f(A,\cdots,A)=f(A)$$

$$f(A_1,\cdots,A_j)=f(gA_1g^{-1},\cdots,gA_jg^{-1}) \tag{3.6}$$

を満たす．たとえば，$f(A)=Tr(A^3)$ ならば

$$f(A_1,A_2,A_3)=\frac{1}{2}Tr(A_1A_2A_3+A_2A_1A_3) \tag{3.7}$$

である.

$\mathcal{E}$ を多様体 M 上のベクトルバンドルとする．ただし $\mathcal{E}$ は G を構造群にもつ主バンドル $P\to M$ に付随するベクトルバンドルとする．∇ を P 上の接続とし，F^∇ をその曲率 2 形式とする．$F^{\mathcal{E}}$ は M 上の $\mathbf{g}$ 値 2 形式であり，偶数次形式は積に関して可換であるから，つぎの定義ができる.

【定義 3.3】 $f \in \mathcal{P}(G)$ に対し

$$f(F^{\nabla}) \in \Omega(M) \tag{3.8}$$

とおく.

【補題 3.4】 $\mathcal{E}$ を多様体 M 上のベクトルバンドル，$f \in \mathcal{P}(G)$ とする.

(1) $f(F^{\nabla})$ は閉形式である，$df(F^{\nabla}) = 0$

(2) ∇_0, ∇_1 を 2 つの接続とするときある M 上の微分形式があって

$$f(\nabla_1) - f(\nabla_0) = dh(\nabla_0, \nabla_1) \tag{3.9}$$

が成り立つ.

(3) $f(\nabla)$ のドラームコホモロジー類は接続およびファイバー計量のとり方によらない.

証明　$f = f_0 + \cdots + f_\nu$, $f_j \in \mathcal{P}_j(G)$ と分解して，f は次数 j の斉次不変多項式と仮定してよい．f の極化形式をとることにより，f を多重線形対称不変多項式に置き換える．$x_0 \in M$ の近傍で $\mathcal{E}$ の自明化をとり，$\nabla = d + \omega$, $\omega(x_0) = 0$ かつ $dF(x_0) = 0$ とする．このとき

$$\begin{aligned} df(F(x_0)) &= df(F, \cdots, F)(x_0) \\ &= jf(dF, F, \cdots, F)(x_0) = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

$df(F)$ は自明化によらないので (1) が得られる.

∇_0 と ∇_1 を結ぶ接続を

$$\nabla_t = t\nabla_1 + (1-t)\nabla_0, \qquad t \in [0,1] \tag{3.11}$$

とする．∇_t の接続 1 形式 ω_t は，$\theta = \omega_1 - \omega_0$ として

$$\omega_t = \omega_0 + t\theta \tag{3.12}$$

で与えられる．F_t を ∇_t の曲率 2 形式として

$$f(\theta, F_t, \cdots, F_t) \in \Omega^{2j-1}(M) \tag{3.13}$$

とおく．f の不変性から

$$f(\theta, F_t, \cdots, F_t) = f(h\theta h^{-1}, hF_t h^{-1}, \cdots, hF_t h^{-1}) \\ = f(\theta, F_t, \cdots, F_t) \tag{3.14}$$

が得られ，したがって自明化によらず定義される．さらに

$$f(\nabla_1) - f(\nabla_0) = \int_0^1 \partial_t f(\nabla_t) dt \\ = j \int_0^1 f(\dot{F}_t, F_t, \cdots, F_t) dt \tag{3.15}$$

となる．そこで

$$h(\nabla_0, \nabla_1) = j \int_0^1 f(\theta, F_t, \cdots, F_t) dt \tag{3.16}$$

とおく．この h に対し (2) が成り立つことをいうためには

$$df(\theta, F_t, \cdots, F_t) = f(\dot{F}_t, F_t, \cdots, F_t) \tag{3.17}$$

がすべての $t \in [0,1]$ に対し成り立つことをいえばよい．(3.17) の両辺は不変式で定義されているので，適当な自明化を選んで単純化してもよい．$x_0 \in M$, $t_0 \in [0,1]$ とする．自明化を選んで $\omega_{t_0}(x_0) = 0$, $dF_{t_0}(x_0) = 0$ とする．このとき

$$\dot{F}_{t_0}(x_0) = \partial_t\{d\omega_0 + td\theta - \omega_t \wedge \omega_t\}_{t_o}(x_0) \\ = d\theta(x_0) - \dot{\omega}_{t_0}(x_0) \wedge \omega_{t_0}(x_0) - \omega_{t_0}(x_0) \wedge \dot{\omega}_{t_0}(x_0) \\ = d\theta(x_0) \tag{3.18}$$

であり

$$df(\theta, F_{t_0}, \cdots, F_{t_0})(x_0) = f(d\theta, F_{t_0}(x_0), \cdots, F_{t_0}(x_0)) \\ = f(\dot{F}_{t_0}(x_0), F_{t_0}(x_0), \cdots, F_{t_0}(x_0)) \tag{3.19}$$

が成り立ち，(3.17) が証明された．

$G = GL(n, \mathbf{C})$ または $G = GL(n, \mathbf{R})$ に対しては上のことより (3) が導かれる．

$\mathcal{E}$ が計量をもつ場合にドラームコホモロジー類 $[f(\nabla)]$ が計量によらないことを証明する．$(\cdot,\cdot)_0$, $(\cdot,\cdot)_1$を 2 つのファイバー計量とする．

$M \times [0,1]$ 上のバンドル $\mathcal{E} \times [0,1]$ を考える．1の分解を用いて $\mathcal{E} \times [0,1]$ 上のファイバー計量 $(\cdot,\cdot)$ で，$t=0$ の近くで $(\cdot,\cdot)_0$，$t=1$ の近くで $(\cdot,\cdot)_1$ に一致するものを構成することができる．この計量に関する $\mathcal{E} \times [0,1]$ 上の接続 $\tilde{\nabla}$ の，$M \times \{0\}$ と $M \times \{1\}$ への制限はそれぞれ ∇_0 と ∇_1 に一致する．$df(\tilde{F}) = 0$ であるから，$\tilde{F}$ の $M \times \{0\}$ と $M \times \{1\}$ への制限は同じドラームコホモロジー類を表す． ■

定義 3.3 と補題 3.4 により接続 ∇ の与えられたベクトルバンドル $\mathcal{E}$ に対して，不変式 $f \in \mathcal{P}(G)$ に $f(F^\nabla)$ のドラームコホモロジー類 $[f(F^\nabla)] \in H(M, \mathbf{R})$ を対応させて代数準同型写像

$$\mathcal{P}(G) \longrightarrow H(M, \mathbf{R})$$

が得られる．これをチャーン・ヴェイユ準同型写像とよぶ．

3.2　チャーン類

$A \in gl(n, \mathbf{C})$ に対し**チャーン多項式**（Chern polynomial）$c(A)$ を

$$\begin{aligned} c(A) &= \det\left(I + i\frac{A}{2\pi}\right) \\ &= 1 + c_1(A) + \cdots + c_n(A) \end{aligned} \tag{3.20}$$

で定義する．$\mathcal{P}_j(GL(n, \mathbf{C}))$ の元 $c_j(A)$ は**第 j チャーン多項式**（j-th Chern polynomial）とよばれる不変多項式である．

【補題 3.5】　つぎが成り立つ．

$$\mathcal{P}(GL(n, \mathbf{C})) = \mathcal{P}(U(n)) = \mathbf{C}[c_1, \cdots, c_k] \tag{3.21}$$

証明　$A = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を対角行列とする．$s_j(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ を基本対称式とする．

$$\det(I + A) = \prod_j (1 + \lambda_j) = s_0(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) + \cdots + s_n(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \tag{3.22}$$

すると

$$c_j(A) = s_j(i\lambda_j/2\pi) \tag{3.23}$$

である．$f \in \mathcal{P}(GL(n,\mathbf{C}))$ とすれば，$A = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ に対し $f(A) = \widehat{f}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$ となる多項式 $\widehat{f}$ がある．A の固有値は，$GL(n,\mathbf{C})$ の適当な元で A の共役をとることにより置換させることができる．したがって $\widehat{f}$ は $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ の対称式である．基本対称式はすべての対称式のなす代数の代数的な基底をなすので，一意に決まる多項式 q があって $\widehat{f}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = q(s_1, \cdots, s_n)$ となり，ゆえに

$$f(A) = q(c_1, \cdots, c_n)(A) \tag{3.24}$$

が成り立つ．f は不変多項式であるから，(3.24) は対角化可能な行列に対して成り立つ．一方対角化可能な行列は $GL(n,\mathbf{C})$ に稠密に存在し，f は連続であるから，結局 (3.24) はすべての A に対し成り立つ．ゆえに $\mathcal{P}(GL(n,\mathbf{C}))$ は $\{c_1, \cdots, c_n\}$ により，代数的に生成される．

すべての行列 $A \in u(n)$ は $U(n)$ の元により対角化可能であるから，上の議論は $\mathcal{P}(U(n))$ に対してまったく同様に成り立ち，したがって $\mathcal{P}(U(n))$ は $\{c_1, \cdots, c_n\}$ によって代数的に生成される．

c_j たちは基本対称式に対応しているので，これらの間には自明でない代数関係式は存在しない．これより補題が従う．■

補題 3.4 によりつぎの定義ができる．

【定義 3.6】 $\mathcal{E} \to M$を多様体 M 上の n 次元複素ベクトルバンドルとする．∇ を $\mathcal{E}$ の接続，F をその曲率とする．∇ に対応する $\mathcal{E}$ の**チャーン形式**（Chern form）$c(F)$ を

$$\begin{aligned} c(\mathcal{E}) &= \det\left(I + i\frac{F}{2\pi}\right) \\ &= 1 + c_1(F) + \cdots + c_n(F) \end{aligned} \tag{3.25}$$

で定義する．$c_j(F)$ のドラームコホモロジー類を $c_j(\mathcal{E})$ と書き，ベクトルバンドル $\mathcal{E}$ の**第 j チャーン類**（j-th Chern class）とよぶ．

$c_j(\mathcal{E})$ はドラームコホモロジーの元であるから，実係数コホモロジー類を定めている．上の定義における因子 2π は，$c_j(\mathcal{E})$ を整係数コホモロジー類にするためのも

のである．これは3.6節の複素射影空間での計算と，3.7節のトム形式およびそれに続くポアンカレ双対定理についての記述を見れば理解されることと思う．

【補題 3.7】 チャーン類はつぎの性質をもつ．

(1) $c_k(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) = \sum_{p+q=k} c_p(\mathcal{E}_1) \wedge c_q(\mathcal{E}_2)$，すなわち $c(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) = c(\mathcal{E}_1) \wedge c(\mathcal{E}_2)$

(2) $\mathcal{E}$ の双対バンドルを $\mathcal{E}^*$ とすれば，$c_k(\mathcal{E}^*) = (-1)^k c_k(\mathcal{E})$

証明 (1) はただちに得られる．双対バンドル $\mathcal{E}^*$ の上の接続 ∇^* の曲率は $-{}^tF$ で与えられ，したがって

$$c(\mathcal{E}) = \det\left(I + \frac{i}{2\pi}F\right)$$

$$c(\mathcal{E}^*) = \det\left(I - \frac{i}{2\pi}{}^tF\right) = \det\left(I - \frac{i}{2\pi}F\right) \tag{3.26}$$

となり補題が証明される．■

3.3　ポントリャーギン類

【定義 3.8】 $n = 2k$ または $n = 2k+1$ とする．$A \in gl(n, \mathbf{R})$ に対し，**ポントリャーギン多項式** (Pontrjagin polynomial) $P(A)$ を

$$\begin{aligned} p(A) &= \det\left(I + \frac{1}{2\pi}A\right) \\ &= 1 + p_1(A) + p_2(A) + \cdots + p_k(A) \end{aligned} \tag{3.27}$$

で定義する．

ポントリャーギン多項式はチャーン多項式と

$$p_j(A) = (-1)^j c_{2j}(A) \tag{3.28}$$

で関係している．

【補題 3.9】 $n=2k$ または $n=2k+1$ のとき

$$\mathcal{P}(O(n)) = \mathbf{C}[p_1, \cdots, p_k] \tag{3.29}$$

証明　$\lambda_j = -2\pi x_j$として

$$B(x_1, \cdots, x_k) = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_2 & \cdots \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

とおく．nが奇数の場合は，最後のブロックは0を要素とする1×1ブロックである．不変多項式 f に対し $\widehat{f}(x_1, \cdots, x_k) = f(B(x_1, \cdots, x_k))$ とおく．

任意の $A \in o(n)$ に対し $g \in O(n)$ を選んで $gAg^{-1} = B(x_1, \cdots, x_k))$ とすることができ，

$$p(A) = \prod_j (1 + x_j^2), \quad p_j(A) = s_j(x_1^2, \cdots, x_k^2) \tag{3.31}$$

となる．f は不変であるから，$f(A) = \widehat{f}(x_1, \cdots, x_k)$ と表され，$O(n)$ の適当に選んだ元により x_jを$-x_j$に置き換え，またx_jたちを置換させることができるので，$\widehat{f}$ は $x_1^2, \cdots, x_k^2$ の対称式である．$\widehat{f}$ を基本対称式により表して補題が得られる．■

【定義 3.10】 $n=2k$ または $n=2k+1$ とする．$\mathcal{E} \to M$ を多様体 M上の n 次元実ベクトルバンドルとする．∇ を $\mathcal{E}$ の接続，F をその曲率とする．∇ に対応する $\mathcal{E}$ の**ポントリャーギン形式** (Pontrjagin form) $p(F)$ を

$$\begin{aligned} p(F) &= \det\left(I + i\frac{F}{2\pi}\right) \\ &= 1 + p_1(F) + \cdots + p_k(F) \end{aligned} \tag{3.32}$$

で定義する．$p_j(F)$ のドラームコホモロジー類を $p_j(\mathcal{E})$ と書き，ベクトルバンドル $\mathcal{E}$ の第 j **ポントリャーギン類** (Pontrjagin class) とよぶ．

3.4 オイラー類

ユニタリ群と直交群に対し，不変多項式環は自明でない関係式をもたない多項式環であった．しかしこれは $\mathcal{P}(SO(2k))$ に対してはそうではない．

【定義 3.11】 $n = 2k, A = (A_{ab}) \in o(2k, \mathbf{R})$ とする．σ_nを n 次対称群として

$$e_n(A) = \frac{(-4\pi)^{-k}}{k!} \sum_{\sigma \in \sigma_n} sign(\sigma) A_{\sigma(1)\sigma(2)} \cdots A_{\sigma(2k-1)\sigma(2k)} \tag{3.33}$$

と定義する．

【補題 3.12】 つぎが成り立つ．

(1) $n = 2k+1$ ならば，$\mathcal{P}(SO(n)) = \mathcal{P}(O(n)) = \mathbf{C}[p_1, \cdots, p_k]$

(2) $n = 2k$ ならば，$e_n \in \mathcal{P}(SO(n))$ で $e_n^2 = p_k$となり

$$\mathcal{P}(SO(n)) = \mathbf{C}[p_!, \cdots, p_k] \oplus e_n \cdot \mathbf{C}[p_1, \cdots, p_k] \tag{3.34}$$

である．

証明 $n = 2k+1$ とする．$f \in \mathcal{P}(SO(n))$, $A \in o(n)$ とする．A を共役をとって (3.30) のかたちにする．(3.30) の 0 を要素とする最後の 1×1 ブロックを用いて，共役によって λ_k を $-\lambda_k$ に置き換え，$so(n)$ の元にすることができる．したがって $f(A) = \hat{f}(\lambda_j^2)$ となり，$O(n)$ を $SO(n)$ に制限しても新しい不変多項式は現れない．

$n = 2k$ とする．$x_j = -\lambda_j/2\pi$ を正規化された固有値とすれば

$$\begin{aligned} e_n(A) &= (2\pi)^{-k}\lambda_1 \cdots \lambda_k = x_1 \cdots x_k \\ e_n(A)^2 &= x_1^2 \cdots x_k^2 = p_k(A) \end{aligned} \tag{3.35}$$

となる．$p_k \in \mathcal{P}(O(n))$ であるから，すべての $g \in O(n)$ に対し $e_n(gAg^{-1})^2 = e_n(A)^2$ が成り立つ．かりに $e_n(A)$ が 0 ならば，すべての $g \in O(n)$ に対し $e_n(gAg^{-1}) = 0$ である．$e_n(A) \neq 0$ ならば，符号 $\epsilon(A,g) = \pm 1$ を選んで

$$e_n(gAg^{-1}) = \epsilon(A,g) e_n(A) \tag{3.36}$$

とできる．$e_n(A,\cdot)$ は連続であるから，$\epsilon(A,g)$ は g について連続である．$\epsilon(A,I)=I$ であり $SO(n)$ は連結であるから，すべての $g\in SO(n)$ に対し $\epsilon(A,g)=1$ となる．ゆえに $e_n\in\mathcal{P}(SO(n))$ である．g_0 を超平面に関する鏡映とすれば $\epsilon(A,g_0)=-1$ となり $e_n\notin\mathcal{P}(O(n))$ がわかる．

$f\in\mathcal{P}(SO(n))$ とし，$g_0\in O(n)-SO(n)$ とする．分解

$$
\begin{aligned}
f_o(A) &= \frac{1}{2}(f(A)-f(g_0Ag_0^{-1}))\\
f_e(A) &= \frac{1}{2}(f(A)+f(g_0Ag_0^{-1}))
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

を考える．$g_1\in O(n)-SO(n)$ ならば $g_0g_1\in SO(n)$ であり，分解は $g_0\in O(n)-SO(n)$ の選び方によらない．

$$
f_e\in\mathcal{P}(O(n)),\quad f_o\in\mathcal{P}(SO(n))
\tag{3.38}
$$

であることに注意しよう．f_o は $O(n)-SO(n)$ の作用で符号を変える．適当な向きを反対にする写像により共役をとって，x_j を $-x_j$ に置き換えることができるから

$$
f_o(x_1,\cdots,x_j,\cdots,x_k)=-f_o(x_1,\cdots,-x_j,\cdots,x_k)
\tag{3.39}
$$

が成り立つ．したがって x_j は f_o のすべての単項式を割ることがわかる．$e_n(x)=x_1\cdots x_k$ であるから，ある $\tilde{f}\in\mathcal{P}(O(n))$ に対し

$$
f_o(x_1,\cdots,x_k)=e_n(x)\tilde{f}(x_1,\cdots,x_k)
\tag{3.40}
$$

が成り立つ．■

【定義 3.13】 $\mathcal{E}\to M$ を多様体 M 上のリーマン計量をもつ向きづけられた $n=2k$ 次元実ベクトルバンドルとする．∇ を $\mathcal{E}$ の接続，F をその曲率とする．∇ に対応する**オイラー形式**（Euler form）を $e_n(F)$ で定義する．$e_n(F)$ の定めるドラームコホモロジーの元 $e(\mathcal{E})\in H^{2k}(M,\mathbf{R})$ を，$\mathcal{E}$ の**オイラー類**（Euler class）とよぶ．

【補題 3.14】 オイラー類はつぎの性質をもつ．

(1) $\mathcal{E}$ の向きづけを反対にすれば，$e(\mathcal{E})$ は $-e(\mathcal{E})$ に変わる．

(2) $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ を M上のリーマン計量をもつ向きづけられた $2k_1$および $2k_2$ 次元ベクトルバンドルとすれば，$e(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) = e(\mathcal{E}_1) \wedge e(\mathcal{E}_2)$ である．

(3) $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ を M上のリーマン計量をもつ向きづけられた奇数次元ベクトルバンドルとすれば，$e(\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2) = 0$ である．

(4) $\mathcal{E}$ を M 上のエルミート計量をもつ複素 k 次元ベクトルバンドルとすれば，$\mathcal{E}$ は $2k$ 次元実ベクトルバンドルとして複素構造による向きづけをもち

$$c_k(\mathcal{E}) = e(\mathcal{E}) \tag{3.41}$$

が成り立つ．

証明 (1), (2) および (3) は明らかである．(4) を証明する．複素ベクトル空間 E の基底を $e_1, \cdots, e_k$とすれば

$$\{e_1, ie_1, \cdots, e_k, ie_k\} \tag{3.42}$$

は実ベクトル空間としての E の正規直交基底である．A を E 上の**歪エルミート行列**（skew Hermitian matrix）とする．複素構造を忘れれば A は E 上の**反対称行列**（skew symmetric matrix）A_rを与える．E の基底として $Ae_j = i\lambda_j e_j$ を満たすものをとる．$x_j = -\lambda_j/2\pi$ を正規化された固有値とすれば

$$c_j(A) = x_1 \cdots x_k = (-2\pi)^{-k} \lambda_1 \cdots \lambda_k \tag{3.43}$$

である．また

$$A_r(e_j) = \lambda_j(ie_j), \qquad A_r(ie_j) = -\lambda_j e_j \tag{3.44}$$

が成り立ち，したがって A_rは (3.30) で与えたブロック対角型をもっている．これから (4) が得られる． ■

3.5 生成母関数

前節までで基本的な特性類の定義をしたが，指数定理に現れる特性類はこれらのものの積の組合せになっている．この組合せはディラック作用素の 2 乗の熱核の漸

近展開から得られるものであるが，**不変生成母関数**（invariant generating function）の言葉で以下のようにまとめて定義される．

【定義 3.15】　$A \in u(n)$ の固有値を $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ とする．

(1)　A のチャーン指標（Chern character）級数 $ch(A)$ を

$$ch(A) = \sum_j e^{i\lambda_j/2\pi} \tag{3.45}$$

で定義する．

(2)　A のトッド種数（Todd genus）級数 $Td(A)$ を

$$Td(A) = \prod_j (i\lambda_j/2\pi)(1-e^{-i\lambda_j/2\pi})^{-1} \tag{3.46}$$

で定義する．

【定義 3.16】　$A \in o(2k)$ の固有値を $\{\pm i\lambda_1, \cdots, \pm i\lambda_k\}$，$A \in o(2k+1)$ の固有値を $\{0, \pm i\lambda_1, \cdots, \pm i\lambda_k\}$ とする．

(1)　A の $\boldsymbol{\widehat{A}}$ **種数**（$\widehat{A}$-genus）級数を

$$\widehat{A}(A) = \prod_j (-\lambda_j/2\pi)(2\sinh(-\lambda_j/4\pi))^{-1} \tag{3.47}$$

で定義する．

(2)　A の $\boldsymbol{L}$ **種数**（L-genus）級数を

$$L(A) = \prod_j (-\lambda_j/2\pi)(2\tanh(-\lambda_j/2\pi))^{-1} \tag{3.48}$$

で定義する．

上の定義において，関数 $z/\tanh(z)$ と $z/\{2\sinh(z/2)\}$ が変数 z の偶関数であることから，(3.47) および (3.48) は λ_jの符号の選び方にはよらないことに注意する．

チャーン指標級数はチャーン多項式で表される．

$$ch = n + c_1 + \frac{1}{2}(c_1^2 - 2c_2) + \frac{1}{6}(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3) + \cdots \tag{3.49}$$

その他のものについても，対応するコホモロジー特性類がチャーン類，ポントリャーギン類で書かれるが，それらはすべて指数定理に現れるので，そのときにもう一度記述することにする．

3.6 複素射影空間

この節で複素射影空間上のバンドルについて特性類の計算を行う．これは特殊ではあるがすべての特性類の計算の基礎になるものである．

3.6.1 直線バンドル

【定義 3.17】 $\mathbf{C}^* = \mathbf{C} - \{0\}$ を 0 でない複素数全体の集合とする．$\mathbf{C}^*$は $\mathbf{C}^n$にスカラー倍で作用する．n 次元**複素射影空間**（complex projective space）を

$$\mathbf{CP}^n = (\mathbf{C}^{n+1} - \{0\})/\mathbf{C}^* \tag{3.50}$$

で定義する．

$z \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ に対し z の定める $\mathbf{CP}^n$ の点を $[z]$ で，また z ではられる $\mathbf{C}^{n+1}$ の 1 次元線形部分空間を $<z>$ で表す．

【定義 3.18】 $\mathcal{L} \to \mathbf{CP}^n$を $\mathbf{CP}^n$上の**複素直線バンドル**（complex line bundle）で

$$\mathcal{L} = \{([z], u) \in \mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}^{n+1} \mid u \in <z>\} \tag{3.51}$$

で定義されるものとする．$\mathcal{L}$の双対バンドル $\mathcal{L}^*$を**超平面バンドル**（hyperplane bundle）とよぶ．

$\mathbf{CP}^n$はつぎの複素座標近傍系 $\{U_j\}_{\{j=0,\cdots,n+1\}}$をとることにより複素多様体の構造をもつ．

$$U_j = \{\, [z] \in \mathbf{CP}^n \mid z_j \neq 0\} \tag{3.52}$$

U_j は $l \neq j$ に対し $w_l = \dfrac{z_l}{z_j}$ とおいて写像

$$U_j \ni [z_l] \longrightarrow (w_0, \cdots, w_{j-1}, w_j, \cdots, w_{n+1}) \in \mathbf{C}^n \tag{3.53}$$

で $\mathbf{C}^n$ と同型である．

$\mathcal{L}$ 上のエルミート計量を

$$\|(z_0, \cdots, z_n)\|^2 = \sum_{j=0}^{n} |z_j|^2 \tag{3.54}$$

で定義する．このエルミート計量からきまるリーマン接続の $\mathcal{L}$ の第1チャーン特性形式は

$$c_1(\mathcal{L}) = (2\pi i)^{-1}\partial\bar{\partial}\log h \tag{3.55}$$

である．$x = c_1(\mathcal{L}^*)$ とおく．$\mathbf{CP}^n$ は複素構造による自然な向きづけをもち，$2n$ 次微分形式 x^n の $\mathbf{CP}^n$ 上の積分が定義される．これを

$$x^n[\mathbf{CP}^n] = \int_{\mathbf{CP}^n} x^n \tag{3.56}$$

と書く．

【補題 3.19】　つぎが成り立つ．

(1)　$x^n[\mathbf{CP}^n] = 1$

(2)　$H^*(\mathbf{CP}^n, \mathbf{R}) = \mathbf{R}[x]/(x^{n+1} = 0)$

証明　座標近傍 U_n をとる．

$$\mathbf{CP}^n - U_n = \mathbf{CP}^{n-1} \tag{3.57}$$

は測度0であるから

$$\int_{U_n} x^n = 1 \tag{3.58}$$

をいえばよい．$w \in \mathbf{C}^n$ に対し $\|w\| = r$ として

$$\begin{aligned} x &= -(2\pi i)^{-1}\partial\bar{\partial}\log(1 + \|w\|^2) \\ &= -(2\pi i)^{-1}\partial\left\{(1 + \|w\|^2)^{-1}\sum_l w_l d\bar{w}_l\right\} \end{aligned}$$

$$= -(2\pi i)^{-1}\left\{(1+r^2)^{-1}\sum_l dw_l\wedge d\bar{w}_l - (1+r^2)^{-2}\sum_{l,k} w_l\bar{w}_k dw_l\wedge d\bar{w}_k\right\} \tag{3.59}$$

であり，点 $(r,0,\cdots,0)$ で値をとって

$$\begin{aligned} x &= -(2\pi i)^{-1}\left\{(1+r^2)^{-1}\sum_l dw_l\wedge d\bar{w}_l - (1+r^2)^{-2}r^2 dw_1\wedge d\bar{w}_1\right\} \\ &= -(2\pi i)^{-1}\left\{(1+r^2)^{-1}\sum_{l>1} dw_l\wedge d\bar{w}_l + (1+r^2)^{-2} dw_1\wedge d\bar{w}_1\right\} \end{aligned} \tag{3.60}$$

となる．したがって $v_{S^{2n-1}}$ を単位球面の体積要素とすれば

$$\begin{aligned} x^n &= (-2\pi i)^{-n} n!(1+r^2)^{-n-1} dw_1\wedge d\bar{w}_1\wedge dw_2\wedge d\bar{w}_2\wedge\cdots \\ &= \pi^{-n} n!(1+r^2)^{-n-1} v_{S^{2n-1}}\cdot(r^{2n-1}dr) \end{aligned} \tag{3.61}$$

球対称性から単位球面のすべての点において

$$x^n = \pi^{-n} n!(1+r^2)^{-n-1} v_{S^{2n-1}}\cdot(r^{2n-1}dr) \tag{3.62}$$

がわかる．

$$vol(S^{2n-1}) = 2\pi^n/(n-1)! \tag{3.63}$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \int_{U_n} x^n &= \pi^{-n} n! \int r^{2n-1}(1+r^2)^{-n-1} dr\cdot v_{S^{2n-1}} \\ &= 2n\int_0^\infty r^{2n-1}(1+r^2)^{-n-1}dr \end{aligned} \tag{3.64}$$

変数変換 $r^2 = t$ と部分積分によって

$$\begin{aligned} \int_{U_n} x^n &= n\int_0^\infty t^{n-1}(1+t)^{-n-1}dt \\ &= (n-1)\int_0^\infty t^{n-2}(1+t)^{-n}dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^\infty (1+t)^{-2} dt = 1 \tag{3.65}$$

胞体分割 $\mathbf{CP}^n = \mathbf{CP}^{n-1} \cup \mathbf{C}^n$ から帰納的に

$$H^j(\mathbf{CP}^n, \mathbf{R}) = \begin{cases} \mathbf{R} & (0 \leq j = 2k \leq 2n) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

がわかる．$x^n \neq 0$ から x^k は $H^{2k}(\mathbf{CP}^n, \mathbf{R})$ を生成することが導かれる． ■

3.6.2 複素射影空間の特性類

複素射影空間 $\mathbf{CP}^n$ の接ベクトルバンドル $T\mathbf{CP}^n$ の特性類を計算しよう．

【補題 3.20】 $\mathbf{CP}^n$ 上のベクトルバンドルの同型

$$T\mathbf{CP}^n \oplus \varepsilon \cong \mathcal{L}^* \otimes (n+1)\varepsilon \tag{3.66}$$

が成り立つ．ただし ε は自明な直線バンドル $\mathbf{CP}^n \times \mathbf{C}$ である．

証明 $\mathbf{C}^{n+1}$ の座標系を $z = (z_0, \cdots, z_n)$ とする．

$$\pi : \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{CP}^n \tag{3.67}$$

を射影とする．$z \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ に対し

$$\oplus\ H_z = \{v \in \mathbf{C}^{n+1} \mid v \perp < z >\} \tag{3.68}$$

を $< z >$ に垂直な $\mathbf{C}^{n+1}$ の超平面とし，

$$\mathcal{H} = \{(z, v) \in \mathbf{C}^{n+1} - \{0\} \mid v \in H_z\} \tag{3.69}$$

とおけば，$\mathcal{H}$ は $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 上のベクトルバンドルである．$\pi^* T\mathbf{CP}^n$ を接ベクトルバンドルの π による引き戻しとすれば，自然な同型

$$\pi^* T\mathbf{CP}^n \cong \mathcal{H} \tag{3.70}$$

がある．また $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 上の写像

$$\begin{aligned} \mathcal{H} \oplus \varepsilon &\longrightarrow \mathbf{C}^{n+1} \\ (z, v) \oplus (t) &\longrightarrow tz + v \end{aligned} \tag{3.71}$$

は $\mathbf{C}^{n+1} - \{0\}$ 上のベクトルバンドル同型

$$\pi^* T\mathbf{CP}^n \oplus \varepsilon \cong (n+1)\varepsilon \tag{3.72}$$

を与える．以上のすべての構成は $\mathbf{C}^*$ の作用と両立している．同型 (3.72) の $\mathbf{C}^*$ 作用による商をとれば，$\mathcal{L}^*$ の定義より補題が得られる．■

【補題 3.21】　$x = c_1(\mathcal{L}^*)$ とする．

(1)　$c(\mathbf{CP}^n) = c(T\mathbf{CP}^n) = (1+x)^{n+1}$

(2)　$p(\mathbf{CP}^n) = p(T\mathbf{CP}^n) = (1+x^2)^{n+1}$

証明　補題 3.20 から

$$\begin{aligned} c(T\mathbf{CP}^n) &= c(T\mathbf{CP}^n \oplus \varepsilon) = c(\mathcal{L}^* \otimes (n+1)\varepsilon) \\ &= c(\mathcal{L}^*)^{n+1} = (1+x)^{n+1} \end{aligned} \tag{3.73}$$

である．$T\mathbf{CP}^n$ を実ベクトルバンドルと見なせば同型

$$T\mathbf{CP}^n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = T\mathbf{CP}^n \oplus T^*\mathbf{CP}^n \tag{3.74}$$

があり，したがって

$$\begin{aligned} c(T\mathbf{CP}^n \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}) &= c(T\mathbf{CP}^n \oplus T^*\mathbf{CP}^n) \\ &= (1+x)^{n+1}(1-x)n+1 \\ &= (1-x^2)^{n+1} \end{aligned} \tag{3.75}$$

が得られる．ポントリャーギン類の定義から (2) が導かれる．■

3.7　トム形式とポアンカレ双対定理

前節までに与えた特性類の定義は多分に形式的なきらいがある．特性類はベクトルバンドルの曲がり具合をコホモロジーの言葉で表すものであるが，このことは特性類をベクトルバンドルの一次独立な切断の存在に対する障害としてとらえることにより，より幾何学的に表現することができる．位相幾何学で障害理論と

よばれているもので，特性類の原形はこうして導入された．3.7節，3.8節，3.9節でこれを説明する．

3.7.1　ファイバー積分

定義2.10で多様体のドラームコホモロジー群を定義したが，コンパクトではない多様体に対しては，それとは別にコンパクト台ドラームコホモロジー群が定義される．

【定義 3.22】　多様体 M に対し，$\Omega_c(M)$ で M 上のコンパクト台をもつ微分形式のなす空間とすれば，$\Omega_c(M) \subset \Omega(M)$ かつ $\Omega_c(M)$ は外微分作用素 d で閉じており，複体

$$0 \longrightarrow \Omega_c^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^1(M) \xrightarrow{d} \Omega_c^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \tag{3.76}$$

が得られる．この複体 $\{\Omega_c(M), d\}$ のコホモロジー群を $H_c(M)$ と書いて，M の**コンパクト台ドラームコホモロジー群**（compact support de Rham cohomology group）とよぶ．

Mをコンパクトな向きづけられた n 次元多様体，$p: \mathcal{V} \to M$ を M 上の向きづけられた階数 N の実ベクトルバンドルとする．$j: M \to \mathcal{V}$ を M の $\mathcal{V}$ への零切断としての包含写像とする．$(\Omega_c(\mathcal{V}), d)$ をコンパクト台をもつ微分形式のなすドラーム複体とし，対応するドラームコホモロジー群を $H_c^\bullet(\mathcal{V})$ で表す．

【定義 3.23】　ベクトルバンドル $p: \mathcal{V} \to M$ の**ファイバー積分**（fibre integral）

$$p_* : \Omega_c^k(\mathcal{V}) \longrightarrow \Omega^{k-N}(M) \tag{3.77}$$

をつぎのように定義する．$\alpha \in \Omega_c^k(\mathcal{V})$ に対し，α のファイバー積分 $p_*\alpha \in \Omega^{k-N}(M)$ とは，すべての M 上の微分形式 β に対し，

$$\int_M (p_*\alpha) \wedge \beta = \int_{\mathcal{V}} \alpha \wedge p^*\beta \tag{3.78}$$

を満たす M上の微分形式である．

問　式 (3.78) は，α に対し $p_*\alpha$ を一意に定義することを確かめよ．

(3.78) はすべての $\alpha \in \Omega_c(\mathcal{V})$ と $\beta \in \Omega(M)$ に対し

$$p_*(\alpha \wedge p^*\beta) = p_*\alpha \wedge \beta \tag{3.79}$$

とも書けることに注意しよう．

ファイバー積分はつぎの意味で外微分と可換である．

$$d_M(p_*\alpha) = (-1)^N p_*(d_{\mathcal{V}}\alpha) \tag{3.80}$$

この式からファイバー積分はドラームコホモロジー群の準同型写像

$$p_* : H_c^k(\mathcal{V}) \longrightarrow H^{k-N}(M) \tag{3.81}$$

を誘導することがわかる．

3.7.2　トム形式

特性類を幾何学的にとらえる基礎は多様体のポアンカレ（Poincaré）双対定理である．これを微分形式の段階で与えるものが，ベクトルバンドルのトム形式とよばれる微分形式である．トム形式は，ベクトルバンドル $\mathcal{E} \to M$ に対し全空間 $\mathcal{E}$ 上のコンパクト台をもつ微分形式として定義され，M のドラームコホモロジー群と $\mathcal{E}$ のコンパクト台をもつドラームコホモロジー群との間の同型を与えるものである．

M をコンパクトな向きづけられた n 次元多様体，$p : \mathcal{V} \to M$ を M 上の向きづけられた階数 N の実ベクトルバンドルとする．$j : M \to \mathcal{V}$ を M の $\mathcal{V}$ への零切断（0-section）としての包含写像とする．$(\Omega_c(\mathcal{V}), d)$ を $\mathcal{V}$ 上のコンパクト台をもつ微分形式のなすドラーム複体とし，対応するドラームコホモロジー群を $H_c^\bullet(\mathcal{V})$ で表す．

【定義 3.24】　M 上の向きづけられた階数 N の実ベクトルバンドル $\mathcal{V}$ の**トム形式**（Thom form）とは，閉微分形式 $U \in \Omega_c^N(\mathcal{V})$ で

$$p_*(U) = 1 \in \Omega^0(M) \tag{3.82}$$

を満たすもののことである．ただし p_* はベクトルバンドル $p : \mathcal{V} \to M$ のファイバー積分である．トム形式の定める $H_c^N(\mathcal{V})$ のコホモロジー類を**トム類**（Thom class）とよぶ．

トム形式の構成と存在証明は次節で行うことにし，ここではトム形式の性質とポアンカレ双対定理との関係を述べよう．

$\mathcal{V}$ をユークリッド計量をもった N 次元実ベクトルバンドルとする．$\mathcal{V}$ の各ファイバーを $\mathbf{R}^N$ と同一視して，各ファイバー上で動径ベクトル場 $\Re$（第2章2.2.2項(2.36)）を考える．これらをすべて集めた $\mathcal{V}$ の接ベクトル場を $\mathcal{V}$ の**垂直動径ベクトル場**（vertical radial vector field）とよび，同じ記号 $\Re$ で表す．

【補題 3.25】 $\Re$ を $\mathcal{V}$ の垂直動径ベクトル場とし，$h_t(v) = tv$ とする．$H : \Omega^\bullet(\mathcal{V}) \to \Omega^{\bullet-1}(\mathcal{V})$ を

$$H\beta = \int_0^1 h_t^*(\iota(\Re)\beta)t^{-1}dt \tag{3.83}$$

と定義する．このときすべての $\beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{V})$ に対し，

$$\beta - p^*(j^*\beta) = (dH + Hd)\beta \tag{3.84}$$

が成り立つ．

証明　まず $\Re$ は0で消えるので H を定義する積分は収束することに注意する．$\beta \in \Omega^\bullet(\mathcal{V})$ に対し，$\beta_t = h_t^*\beta$ とおけば $\beta_0 = p^*j^*\beta$ かつ $\beta_1 = \beta$ である．t で微分してカルタン（Cartan）の**ホモトピー公式**（homotopy formula）を用いれば，

$$L(\Re)\beta = d(\iota(\Re)\beta) + \iota(\Re)(d\beta) \tag{3.85}$$

が得られ，補題が証明される．■

【系 3.26】 写像

$$\begin{aligned} \beta &\longrightarrow j^*\beta &: H^\bullet(\mathcal{V}) \longrightarrow H^\bullet(M) \\ \alpha &\longrightarrow p^*\alpha &: H^\bullet(M) \longrightarrow H^\bullet(\mathcal{V}) \end{aligned} \tag{3.86}$$

は互いに他の逆写像である．

【補題 3.27】 $p : \mathcal{V} \to M$ を，多様体 M 上の向きづけられた実ベクトルバンドルとする．なめらかな双一次写像

$$m(\alpha, \beta) : \Omega_c^i(\mathcal{V}) \times \Omega_c^j(\mathcal{V}) \longrightarrow \Omega_c^{i+j}(\mathcal{V}) \tag{3.87}$$

で

$$(p^* p_* \alpha) \wedge \beta - \alpha \wedge (p^* p_* \beta) \\ = dm(\alpha, \beta) - \Big(m(d\alpha, \beta) + (-1)^{|\alpha|} m(\alpha, d\beta)\Big) \tag{3.88}$$

を満たすものが存在する．

証明 つぎの式で与えられるホイットニー和 $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ から $\mathcal{V}$ への写像の 1 パラメーター族 k^t を考えよう．

$$k^t : (v, w) \in \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{V}_x \longrightarrow tv + (1-t)w \in \mathcal{V}_x \tag{3.89}$$

α, β が微分形式ならば，$\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ 上の微分形式 $\alpha \hat{\otimes}_p \beta$ が定義され，

$$k_*^0 \left(\alpha \hat{\otimes}_p \beta\right) = (p^* p_* \alpha) \wedge \beta \\ k_*^1 \left(\alpha \hat{\otimes}_p \beta\right) = \alpha \wedge (p^* p_* \beta) \tag{3.90}$$

が成り立つ．そこで，

$$m(\alpha, \beta) = \int_0^1 k_*^t \left(\alpha \hat{\otimes}_p \beta\right) dt \tag{3.91}$$

とおけばよいことがわかる． ■

さて包含写像 $j : M \to \mathcal{V}$ の像 $j(M)$ は $\mathcal{V}$ の n 次元部分多様体であり，ホモロジー類 $[j(M)] \in H_n(\mathcal{V})$ を与える．このホモロジー類のポアンカレ双対（ポアンカレ双対については第 8 章 8.2 節を参照されたい）は，$\mathcal{V}$ のコンパクト台をもつ微分形式のドラームコホモロジーの元になる．つぎの命題は $\mathcal{V}$ のトム形式が，ポアンカレ双対定理

$$H_\bullet(\mathcal{V}) \cong H_c^{N+n-\bullet}(\mathcal{V}) \tag{3.92}$$

による，$[j(M)]$ の双対コホモロジー類を与える閉微分形式であることをコホモロジーの言葉で述べたものである．

【命題 3.28】 M を向きづけられたコンパクト多様体，$p:\mathcal{V}\to M$ を M 上の向きづけられた階数 N の実ベクトルバンドルとし，$U\in\Omega_c^N(\mathcal{V})$ をそのトム形式とする．つぎが成り立つ．

(1) 写像

$$\begin{aligned} \beta \longrightarrow p_*\beta \qquad & : H_c^\bullet(\mathcal{V}) \longrightarrow H^{\bullet-N}(M) \\ \alpha \longrightarrow U\wedge p^*\alpha \ & : H^\bullet(M) \longrightarrow H_c^{\bullet+N}(\mathcal{V}) \end{aligned} \tag{3.93}$$

は互いに他の逆写像である．

(2) すべての閉微分形式に対し，

$$\int_{\mathcal{V}} U\wedge\beta = \int_M j^*\beta \tag{3.94}$$

である．

証明　(3.79) によりすべての $\beta\in\Omega(\mathcal{V})$ に対して

$$p_*(U\wedge p^*\alpha)=\alpha \tag{3.95}$$

である．補題 3.27 で $\alpha=U$とおいてホモトピー公式

$$\beta - U\wedge(p^*p_*\beta) = dm(U,\beta)-(-1)^N m(U,d\beta) \tag{3.96}$$

が得られ (1) が証明される．

(2) を証明するために補題 3.25 のホモトピー Hを用いる．$\beta\in\Omega(\mathcal{V})$ に対し，

$$\int_{\mathcal{V}} U\wedge\beta = \int_{\mathcal{V}} U\wedge(p^*j^*\beta)+\int_{\mathcal{V}} U\wedge dH\beta+\int_{\mathcal{V}} U\wedge Hd\beta \tag{3.97}$$

となる．右辺の第 1 項は$\int_M j^*\beta$に等しく，第 2 項は U が閉形式であるからストークスの定理により消える．第 3 項は β が閉形式だから，やはり 0 である．　■

3.7.3　トム形式の構成

この節でマタイ・キュレン（Mathai-Quillen）の方法に従って，ユークリッド計量と以下に定義するベレジン積分の概念を用いてトム形式を構成する．

正定値内積をもつ実ベクトル空間をユークリッドベクトル空間とよぶ．トム形式のモデルとして，まず向きづけられたN次元ユークリッド空間V上の体積形式Uで$\int_V U = 1$となるものをつくる．

$x_1, \cdots, x_N$をVの直交座標系とし，

$$U(x) = (2\pi)^{-N/2} e^{-\|x\|^2/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_N \tag{3.98}$$

とおく．Uはコンパクト台をもたないが，この点は後で修正する．

$\{e_i\}$を座標x_jに双対なVの正規直交基底とする．恒等写像$V \to V$を$\Omega^0(V, V)$の元と見なし，その微分を$dx = \sum dx_j \otimes e_j$として$dx \in \Omega^1(V, V)$と考える．$T(V) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$を$V$のテンソル代数とし，$dx \in \Omega^1(V, T(V))$と見なして$\Omega(V, T(V))$の中で$dx$のべき乗をとれば，$(dx)^r \in \Omega^r(V, \Lambda^r V)$である．ゆえに

$$e^{-idx/\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(-idx/\sqrt{2\pi})^n \tag{3.99}$$

は$\Omega(V, \Lambda V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$の元であり，有限和である．

【定義 3.29】　Vが向きづけられたユークリッドベクトル空間で，e_iを向きづけられた正規直交基底とするとき，線形写像

$$T : \Lambda V \longrightarrow \mathbf{R} \tag{3.100}$$

を$e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$の成分への射影として定義し，**ベレジン積分**（Berezin integral）とよぶ．

ベレジン積分$T : \Lambda V \to \mathbf{R}$は，写像$T : \Omega(V, \Lambda V) \to \Omega(V)$に

$$T(\alpha \otimes \xi) = \alpha \otimes T(\xi), \qquad \alpha \in \Omega(V)\ ,\ \xi \in \Lambda V \tag{3.101}$$

とおいて拡張される．

【補題 3.30】 つぎが成り立つ．

(1) 形式 U は

$$U(x) = \varepsilon(N)T\left(e^{-\|x\|^2/2-idx/\sqrt{2\pi}}\right) \tag{3.102}$$

に等しい．ただし $\varepsilon(N)$ は N が偶数のとき 1，奇数のとき i を表す．

(2) U の V 上での積分は 1 に等しい．

証明　e_k を V^* の基底 x_k の双対基底とする．

$$\begin{aligned} T(e^{-idx/\sqrt{2\pi}}) &= T\left(\prod_{k=1}^{N}(1-i(2\pi)^{-1/2}dx_k\otimes e_k)\right) \\ &= (-i)^N(2\pi)^{-N/2}T((dx_1\otimes e_1)\cdots(dx_N\otimes e_N)) \\ &= (-i)^N(-1)^{N(N-1)/2}(2\pi)^{-N/2}dx_1\wedge\cdots\wedge dx_N \end{aligned} \tag{3.103}$$

より (1) がでる．U の積分はガウス積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{2\pi} \tag{3.104}$$

を計算して得られる．■

$p:\mathcal{V}\to M$ を M 上の向きづけられた階数 N の実ベクトルバンドルとする．$\mathcal{V}$ のユークリッド接続 $\nabla^{\mathcal{V}}$ を選び，$\mathbf{x}$ を $p^*\mathcal{V}$ のトートロジカル切断（2.3 節定義 2.20）として，(3.102) の $dx=\sum dx_j\otimes e_j$ を $\nabla^{\mathcal{V}}\mathbf{x}=\sum\nabla^{\mathcal{V}}_j\mathbf{x}\otimes e_j\in\Omega^1(\mathcal{V},p^*\mathcal{V})$ で置き換え，$\varepsilon(N)T(e^{-\|\mathbf{x}\|^2/2-i\nabla^{\mathcal{V}}\mathbf{x}/\sqrt{2\pi}})$ で与えられる $\mathcal{V}$ 上の N 形式を考える．

これはいわば補題 3.30 の U を各ファイバー上に並べたものであるが，ベクトルバンドルと接続が自明なものでなければ一般に閉形式にはならない．$\mathcal{V}$ のトム類を構成するためには，$\mathcal{V}$ のまがり具合を取り込んでこれを閉形式にする必要がある．つまり $\nabla^{\mathcal{V}}$ は平坦ではないので，U を定義するためには適当な補正をしなければならない．

そこで補題 3.30 の式 (3.102) をつぎのように変形して $\mathcal{V}$ のトム類を定義しよう．

$\mathcal{E}$ を B 上の向きづけられた階数 N のユークリッド計量をもったベクトルバンド

ルとする．定義 3.29 のベレジン積分 T は

$$T : \Omega(B, \Lambda\mathcal{E}) \longrightarrow \Omega(B) \tag{3.105}$$

を定義する．$\mathcal{E}$ の共変微分 ∇ は $\Lambda\mathcal{E}$ 上の標準的な共変微分を誘導する．

【命題 3.31】 ∇ を $\mathcal{E}$ の計量と両立する $\mathcal{E}$ の共変微分とすれば，すべての $\alpha \in \Omega(B, \Lambda\mathcal{E})$ に対し

$$dT(\alpha) = T(\nabla\alpha) \tag{3.106}$$

が成り立つ．

証明 N を $\mathcal{E}$ のファイバーの次元とする．ベレジン積分は $\mathcal{E}^*$ の向きづけられた局所正規直交枠 e^i に関して，公式 $e^1 \wedge \cdots \wedge e^N$ によって与えられる切断 $T \in \Gamma(B, \Lambda^N \mathcal{E}^*)$ と，$\Lambda^N \mathcal{E}$ の切断との対写像により与えられる．$\nabla T = 0$ とライプニッツ規則により，命題が得られる． ■

上の命題を $B = \mathcal{V}$, $\mathcal{E} = p^*\mathcal{V}$ で接続 $\nabla^{p^*\mathcal{V}} = p^*\nabla^{\mathcal{V}}$ をもつものに対し適用しよう．切断の空間 $\Omega(\mathcal{V}, \Lambda(p^*\mathcal{V}))$ は部分空間 $\Omega^i(\mathcal{V}, \Lambda^j(p^*\mathcal{V}))$ の和として分解され，**2 重階数づき加群**（bigraded algebra）となる．2.2.1 項 (2.23) により共変微分 $\nabla^{p^*\mathcal{V}}$ は写像

$$\nabla : \Omega^i(\mathcal{V}, \Lambda^j(p^*\mathcal{V})) \longrightarrow \Omega^{i+1}(\mathcal{V}, \Lambda^j(p^*\mathcal{V})) \tag{3.107}$$

を定義する．

$s \in \Gamma(\mathcal{V}, p^*\mathcal{V})$ とする．縮約 $\iota(s)$ を斉次形式 $\alpha \in \Omega(\mathcal{V})$ と $s_k \in \Gamma(\mathcal{V}, p^*\mathcal{V})$, $(1 \le k \le j)$, に対し

$$\begin{aligned}
&\iota(s)(\alpha \otimes (s_1 \wedge \cdots \wedge s_j)) \\
&\quad = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{|\alpha|+k-1}(s, s_k)\alpha \otimes (s_1 \wedge \cdots \wedge \hat{s}_k \wedge \cdots \wedge s_j)
\end{aligned} \tag{3.108}$$

とおいて定義すれば，$\iota(s)$ は写像

$$\iota(s) : \Omega^i(\mathcal{V}, \Lambda^j(p^*\mathcal{V})) \longrightarrow \Omega^i(\mathcal{V}, \Lambda^{j-1}(p^*\mathcal{V})) \tag{3.109}$$

を与える．

$so(\mathcal{V})$ と $\Lambda^2\mathcal{V}$ を写像

$$A \in so(\mathcal{V}) \longrightarrow \sum_{i<j} (Ae_i, e_j) e_i \wedge e_j \tag{3.110}$$

によって同一視する．

すべての $s \in \Omega^0(\mathcal{V}, \Lambda^1(p^*\mathcal{V})) = \Gamma(\mathcal{V}, p^*\mathcal{V})$ と $\alpha \in \Omega$ に対し，$\iota(s)\alpha$ は $\Omega^\bullet(\mathcal{V}, \Lambda^N(p^*\mathcal{V}))$ の成分をもたないので，$T(\iota(s)\alpha) = 0$ である．ゆえにベレジン積分 $T : \Omega(\mathcal{V}, \Lambda p^*\mathcal{V}) \to \Omega(\mathcal{V})$ は

$$dT(\alpha) = T((\nabla + \iota(s))\alpha) \tag{3.111}$$

を満たす．

トム形式の構成のために必要な Ω の元を以下に並べる．

(1) トートロジカル切断　$\mathbf{x} \in \Omega^0(\mathcal{V}, \Lambda^1(p^*\mathcal{V})) = \Gamma(\mathcal{V}, p^*\mathcal{V})$

(2) $\|\mathbf{x}\|^2 \in \Omega^0(\mathcal{V}, \Lambda^0(p^*\mathcal{V}))$，$\nabla\mathbf{x} \in \Omega^0(\mathcal{V}, \Lambda^1(p^*\mathcal{V})) = \Omega^1(\mathcal{V}, p^*\mathcal{V})$

(3) 曲率 $F = (\nabla^{\mathcal{V}})^2 \in \Omega^2(M, so(\mathcal{V}))$ は同一視により $\Omega^2(M, \Lambda^2\mathcal{V})$ の元を与え，さらに $p : \mathcal{V} \to M$ によって $\mathcal{V}$ に引き戻すことにより，$\Omega^2(\mathcal{V}, \Lambda^2 p^*\mathcal{V})$ の元を与える．これも F で表すことにする．

【補題 3.32】 つぎが成り立つ．

(1) $\Omega = \|\mathbf{x}\|^2/2 + i\nabla\mathbf{x}/\sqrt{2\pi} + F/2\pi \in \Omega(\mathcal{V}, \Lambda(p^*\mathcal{V}))$ とおく．このとき

$$\left(\nabla - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x})\right)\Omega = 0 \tag{3.112}$$

が満たされる．

(2) $\rho \in C^\infty(\mathbf{R})$ に対し，$\rho(\Omega) \in \Omega(\mathcal{V}, \Lambda(p^*\mathcal{V}))$ を

$$\rho(\Omega) = \sum_{k=0}^{N} \frac{\rho^{(k)}(\|\mathbf{x}\|^2/2)}{k!} \left(i\nabla\mathbf{x}/\sqrt{2\pi} + F/2\pi\right)^k \tag{3.113}$$

とおく．このとき $\left(\nabla - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x})\right)\rho(\Omega) = 0$ が成り立つ．

証明　(1) ライプニッツ規則と曲率の定義から

$$\begin{aligned}\nabla(\|\mathbf{x}\|^2) &= -2\iota(\mathbf{x})\nabla\mathbf{x}\\ \nabla(\nabla\mathbf{x}) &= \iota(\mathbf{x})F\end{aligned} \tag{3.114}$$

である．ビアンキ恒等式から $\nabla F=0$ であり，$\iota(\mathbf{x})\mathbf{x}=\|\mathbf{x}\|^2$ と $\iota(\mathbf{x})\|\mathbf{x}\|^2=0$ から，$\left(\nabla - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x})\right)\Omega = 0$ が得られる．

(2) $\nabla - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x})$ が $\Omega^1(\mathcal{V}, p^*\mathcal{V})$ の微分であることから

$$\left(\nabla - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x})\right)\rho(\Omega) = 0$$

となる．■

$\Omega \in \sum_{0\le k\le 2}\Omega^k(\mathcal{V}, \Lambda^k(p^*\mathcal{V}))$ から，$\rho(\Omega) \in \sum_{0\le k\le N}\Omega^k(\mathcal{V}, \Lambda^k(p^*\mathcal{V}))$ である．$T(\rho(\Omega)) \in \Omega^N(\mathcal{V})$ であり，命題 3.31 と上の補題 3.29 から

$$dT(\rho(\Omega)) = T((\nabla - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))\rho(\Omega)) = 0 \tag{3.115}$$

となる．ゆえに $T(\rho(\Omega))$ は $\mathcal{V}$ の閉 N 形式である．

【定義 3.33】　トム形式 U を $\rho(x)=e^{-x}$ として，

$$U = \varepsilon(N)T(e^{-\Omega}) = \varepsilon(N)T\left(e^{-(\|\mathbf{x}\|^2/2 + i\nabla\mathbf{x}/\sqrt{2\pi} + F/2\pi)}\right) \tag{3.116}$$

と定義する．

トム形式は，$\mathcal{V}$ の向きづけ，計量とその上の接続に依存していることを注意しておこう．以下で見るように，$F/2\pi$ を付け加えることにより閉形式となり，この項が U とバンドルおよび底空間の幾何学との関係を与える主要項となる．

【命題 3.34】　U の各ファイバー上での積分は 1 である．

証明　$\int_{\mathcal{V}/M} U$ を計算するには，M が 1 点のときを考えればよく，このとき $\mathcal{V}$ はベクトル空間であるので，補題 3.30 に帰着される．■

上に構成されたトム形式は無限遠で急減少であるがコンパクト台ではない．そこで，

$$y \longrightarrow \frac{y}{\left(1-\|y\|^2\right)^{1/2}} \tag{3.117}$$

によって与えられる，$\mathcal{V}$ の単位球バンドルから $\mathcal{V}$ への微分同相写像を用いて，トム形式 Uを引き戻せば，$\mathcal{V}$ の単位球バンドルに台をもつトム形式を得ることができる．

計量の**スケール変換**（rescaling），接続の変化に対応してトム形式がどのように変化するかを記述するのに**転入公式**（transgression formula）とよばれるものがある．最初に計量のスケール変換を考えよう．これは Ω を

$$\Omega_t = t^2 \|\mathbf{x}\|^2 /2 + it\nabla\mathbf{x}/\sqrt{2\pi} + F/2\pi \tag{3.118}$$

に置き換えることと同値である．U_t を Ω_t に対応するトム形式としよう．

【命題 3.35】 つぎの転入公式が成り立つ．

$$\frac{dU_t}{dt} = -i(2\pi)^{-1/2}\varepsilon(N)dT(\mathbf{x}e^{-\Omega_t}) \tag{3.119}$$

証明

$$\frac{d\Omega_t}{dt} = t\|\mathbf{x}\|^2 + i\nabla\mathbf{x}/\sqrt{2\pi} = i(2\pi)^{-1/2}(\nabla - it\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))\mathbf{x} \tag{3.120}$$

であるから，$(\nabla - it\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))\Omega_t = 0$ によって

$$\frac{d}{dt}e^{-\Omega_t} = -\frac{d\Omega_t}{dt}e^{-\Omega_t} = i(2\pi)^{-1/2}(\nabla - it\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))(\mathbf{x}e^{-\Omega_t}) \tag{3.121}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\frac{dU_t}{dt}e^{-\Omega_t} &= i(2\pi)^{-1/2}\varepsilon(N)T\left((\nabla - it\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))(\mathbf{x}e^{-\Omega_t})\right)\\ &= -i(2\pi)^{-1/2}\varepsilon(N)dT(\mathbf{x}e^{-\Omega_t})\end{aligned} \tag{3.122}$$

が得られる．■

つぎに接続の変化を考えよう．∇_sを $\mathcal{V}$ の計量と両立する接続の微分可能な族とし，U_sを対応するトム形式とする．微分 $d\nabla_s/ds$ は $\Omega^2(M, \Lambda^2\mathcal{V})$ の元である．

$d\nabla_s/ds$ を $\mathcal{V}$ に引き戻して $\Omega^1(\mathcal{V}, \Lambda^2(p^*\mathcal{V})) = \Omega^1(\mathcal{V}, \Lambda^2\mathcal{V})$ の元を得るが，これも $d\nabla_s/ds$ で表すことにする．また ∇_s に対応する Ω の元を

$$\Omega_s = \|\mathbf{x}\|^2/2 + i\nabla_s\mathbf{x}/\sqrt{2\pi} + F_s/2\pi \tag{3.123}$$

とする．

【命題 3.36】 つぎの転入公式が成り立つ．

$$\frac{dU_s}{ds} = -(2\pi)^{-1}\varepsilon(N)dT\left(\frac{d\nabla_s}{ds}e^{-\Omega_s}\right) \tag{3.124}$$

証明

$$\frac{d\Omega_s}{ds} = (2\pi)^{-1}(\nabla_s - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))\frac{d\nabla_s}{ds} \tag{3.125}$$

であるから，$(\nabla_s - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))\Omega_s = 0$ を用いて

$$\frac{d}{ds}e^{-\Omega_s} = -\frac{d\Omega_s}{ds}e^{-\Omega_s} = -(2\pi)^{-1}(\nabla_s - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))\left(\frac{d\nabla_s}{ds}e^{-\Omega_s}\right) \tag{3.126}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}\frac{dU_s}{ds} &= -(2\pi)^{-1}\varepsilon(N)T\left((\nabla_s - i\sqrt{2\pi}\iota(\mathbf{x}))\left(\frac{d\nabla_s}{ds}e^{-\Omega_s}\right)\right)\\ &= -(2\pi)^{-1}\varepsilon(N)dT\left(\frac{d\nabla_s}{ds}e^{-\Omega_s}\right)\end{aligned} \tag{3.127}$$

が得られる． ■

3.7.4 部分多様体のポアンカレ双対

前節でスケール変換を行ったときのトム類の変化について述べたが，これがどのように役立つのか見てみよう．

向きづけられた $k+n$ 次元閉リーマン多様体 M の向きづけられた n 次元部分多様体 N^n はホモロジー類 $[N^n] \in H_n(M)$ を定める．実ベクトルバンドルのトム類を用いてつぎのように $[N^n]$ のポアンカレ双対であるドラームコホモロジー類を表す M 上の k 次閉微分形式をつくることができる．

$p : \mathcal{V} \to N$ を N の M での法バンドルとする．M のリーマン計量は N と V のリーマン計量を誘導する．また M と N の向きと両立する向きが $\mathcal{V}$ に一意に決

まる．

微分位相幾何学でよく知られているように$\mathcal{V}$の単位球体バンドル$D(\mathcal{V})$はNの**管状近傍**（tubular neighborhood）と微分同相である．

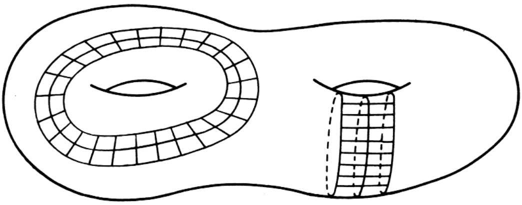


図 7

上で述べたように$D(\mathcal{V})$に台をもつVのトム類Uが存在する．$D(\mathcal{V})$をNのMでの近傍と同一視し，Uをこの近傍で定義されたk次閉微分形式と見なす．$M-D(\mathcal{V})$で0とおいてUをM全体のk形式に拡張することができ，これもUで表すことにする．命題3.28により，つぎが得られる．

【命題 3.37】 Uのドラームコホモロジー類$[U]\in H^k(M)$は，$[N^n]\in H_{n-k}(M)$のポアンカレ双対である．

これをいくぶん見やすい状況で見てみよう．

W^kをMの向きづけられたk次元閉多様体でNと有限個の点で交わるものとする（図8）．さらに各点$x\in W\cap N$で$W\cap D(\mathcal{V})$はファイバー$\mathcal{V}_x$の単位球体$D(\mathcal{V}_x)$になっているとしよう．微分位相幾何学の**アイソトピー**（isotopy）という概念を使えば以下のことに関する限りこれは何の制限にもならない．$x\in W\cap N$でWの向きが$\mathcal{V}$の向きと一致するとき$\varepsilon_x=1$，そうでないとき$\varepsilon_x=-1$として

$$[W]\cap[N]=\sum\varepsilon_x \tag{3.128}$$

とおき，$[W]$と$[N]$の**交点数**（intersection number）とよぶ．$i:W\to M$を包含写像とし，i^*UをUのWへの引き戻しとすれば，トム類の性質 (3.82) から

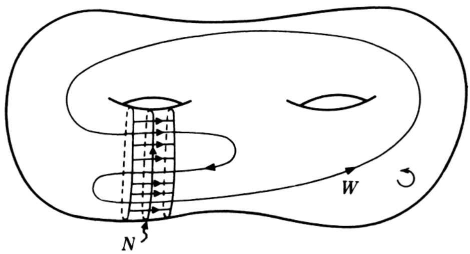


図 8

$$[W]\cap[N]=\int_W i^*U \tag{3.129}$$

となることがわかる．

さてここで $\mathcal{V}$ の計量のスケール変換を行って対応するトム類を U_tと書けば，$\int_W i^*U_t$ は t によらない．$t\to\infty$ の極限を考えると U_tは Nに台をもつディラック測度に近づき，i^*Uの積分は交点の個数を数える演算となり，したがって等式(3.129)を直接的に見ることができる．このようにスケール変換の考え方は，連続的に広がった微分形式の積分で定義される量と，組み合わせ的に定義される量との関連づけに有効である．

3.8　オイラー類と切断の存在

特性類をベクトルバンドルの切断の存在に対する障害としてとらえる出発点はトム形式を用いてオイラー形式を表すことである．

$p:\mathcal{V}\to M$を M上の向きづけられた $2k$ 次元ユークリッドベクトルバンドルとする．$j:M\to\mathcal{V}$ を零切断への包含写像とする．$\mathcal{V}$ のトム形式 U の引き戻し j^*U は M の閉形式であり，これを $\mathcal{V}$ の**オイラー形式**（Euler form）とよんで $e_{2k}(\nabla^{\mathcal{V}})$ と表す．トム類 Uを $\mathcal{V}$ 上の微分形式として展開したとき，ファイバー方向の因子を含まない成分がオイラー形式を与える．これは実は定義3.13で与えたオイラー形式と同じものであることがつぎのようにしてわかる．

F を ∇ の曲率とすれば，

$$j^*U = e_{2k}(\nabla^{\mathcal{V}}) = T(\exp_\Lambda(-F/2\pi)) \tag{3.130}$$

である．(3.130) の右端のベレジン積分を，$\mathcal{V}$ の各ファイバー上で正規直交基底を任意に選んで F を 2 次微分形式として表すことにより計算すれば，(3.130) は定義 3.11 で与えたオイラー多項式 (3.33) に対する $e_{2k}(F)$ に等しい．したがって (3.130) は定義 3.13 のオイラー形式と同じものである．

つぎの命題は補題 3.4 の特殊な場合として証明ずみということになるが，ベレジン積分を用いたものとして挙げておく．

【命題 3.38】 オイラー形式 $e_{2k}(\nabla^{\mathcal{V}})$ は M の次数 $2k$ の閉微分形式であり，そのコホモロジー類はバンドル $\mathcal{V}$ とその向きづけだけにより，計量と $\mathcal{V}$ の共変微分のとり方にはよらない．

証明　$\mathcal{V}$ の計量を選ぶ．∇_sを $\mathcal{V}$ のユークリッド接続の 1 パラメーター族とし，U_s を対応するトム形式の族とする．U_s に対する転入公式 (3.124) から，チャーン指標に対する転入公式の類似として

$$e_{2k}(\nabla_0) - e_{2k}(\nabla_1) = d\int_0^1 T\left(\frac{d\nabla_t}{dt} \wedge \exp_\Lambda(-F/2\pi)_t\right)dt \tag{3.131}$$

が得られる．これにより，$e_{2k}(\nabla)$ のコホモロジー類はその定義に使われた接続にはよらないことがわかる．

計量に対する独立性はつぎのようにして証明される．$(\cdot,\cdot)_0, (\cdot,\cdot)_1$を $\mathcal{V}$ の 2 つの計量とする．可逆な向きを保つ $End(\mathcal{V})$ の切断 g で

$$(v,\ v)_1 = (gv,\ gv)_0 \tag{3.132}$$

を満たすものがある．∇_0 が計量 $(\cdot,\cdot)_0$ に対するユークリッド共変微分ならば，$\nabla_1 = g^{-1}\nabla_0 g$ は計量 $(\cdot,\cdot)_1$ に対するユークリッド共変微分である．これら 2 つの共変微分 ∇_i のオイラー形式を構成すれば，それらは等しい． ■

$\mathcal{V} \to M$を，向きづけられた n 次元コンパクト多様体 M上の向きづけられた $2k$ 次元実ベクトルバンドルとする ($2k \leq n$)．微分位相幾何学の定理により，なめらかな切断 $s : M \to \mathcal{V}$ で $e_{\mathcal{V}} = s^{-1}(0)$ が Mの $n-2k$ 次元部分多様体になるようなものが存在する．この部分多様体は Mの向きと $\mathcal{V}$ の向きから決まる自然な向きづ

けをもつ.

つぎの定理は命題 3.37 から導かれる.

【定理 3.39】 $s : M \to \mathcal{V}$ を向きづけられた $2k$ 次元実ベクトルバンドル $\mathcal{V} \to M$ のなめらかな切断とし, $e_{\mathcal{V}} = s^{-1}(0)$ は M の $n-2k$ 次元部分多様体であると仮定する. このとき $\mathcal{V}$ のオイラー類 $e(\mathcal{V}) \in H^{2k}(M)$ は $e_{\mathcal{V}}$ のポアンカレ双対である.

とくにベクトルバンドル $\mathcal{V} \to M$ に対し, いたるところ 0 でない切断 $s : M \to \mathcal{V}$ が存在すれば $e(\mathcal{V}) = 0$ となる. 定理 3.39 はオイラー類が, ベクトルバンドルのいたるところ 0 でない切断の存在に対する障害を表すことをいっている.

3.8.1　ベクトル場の指数

ベクトルバンドルのオイラー類の特別に重要性な場合として, $\mathcal{V}$ が向きづけられた偶数次元リーマン多様体 M の接バンドル TM の場合をとりあげよう.

∇ をレビ–チビタ接続として微分形式 $e(\nabla)$ が構成されるが, これを $e(M)$ と表し多様体 M のオイラー形式とよぶ. $\dim M = n$ ならば $e(M) \in \Omega^n(M)$ である.

たとえば M を 2 次元リーマン多様体とする. T_xM の正規直交基底を e_1, e_2 とし, $R(e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ とすれば, $e(M)_x = (2\pi)^{-1}\lambda e^1 \wedge e^2$ である.

$v \in \Gamma(M, \mathcal{V})$ をベクトルバンドル $\mathcal{V}$ の切断とする. 引き戻し v^*U は M の次数 N の閉微分形式であり,

$$v^*U = T\left(e^{-(\|v\|^2/2 + i\nabla^{\mathcal{V}}v/\sqrt{2\pi} + F/2\pi)}\right) \tag{3.133}$$

で与えられる. 命題 3.35 の転入公式と同様にして

$$e(\nabla^{\mathcal{V}}) - v^*U = -id\int_0^1 T(v \wedge e^{-(t^2\|v\|^2/2 + it\nabla^{\mathcal{V}}v/\sqrt{2\pi} + F/2\pi)})dt \tag{3.134}$$

が導かれ, したがって v^*U は任意の $v \in \Gamma(M, \mathcal{V})$ に対してオイラー類とコホモロジー類が同じである

この公式は指数定理のもっとも簡単な例である, 多様体のオイラー数をオイラー類の積分で表す公式を与えるガウス・ボンネ・チャーン定理の一形式を示唆して

いる．

$v \in \Gamma(M, TM)$ を M のベクトル場とする．v の零点 p で，リー括弧

$$X \longrightarrow [X, v] \tag{3.135}$$

は T_pM の自己準同型写像 $L_p(v)$ を誘導する．$p = 0$, $v = \sum_{i=1}^n v_i\partial_i$ となる座標系を選べば，$L_p(v)$ は

$$L_p(v)\partial_i = \sum_{j=1}^n (\partial_i v_j(p))\partial_j \tag{3.136}$$

で与えられる．v の零点 p は $L_p(v)$ が可逆のとき**非退化**（non-degenerate）とよばれる．このとき $L_p(v)$ の行列式の符号を $\nu(p, v) \in \{\pm 1\}$ で表すことにする．v のすべての零点が非退化であるとき v は非退化であるという．

M がコンパクトならば，非退化なベクトル場は有限個の零点しかもたない．

非退化なベクトル場の例はモース (Morse) 関数 f を用いて構成される．M 上のなめらかな実関数 f は，その各臨界点 p で適当に座標系を選んで，

$$f = f(p) + \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i x_i^2}{2}, \quad \lambda_i \in \{\pm 1\} \tag{3.137}$$

と表せるとき，モース関数であるという．Mのリーマン計量で，上のような各座標系で $\sum_i dx_i^2$ に等しいものを選べば，ベクトル場 $grad\, f$ は f の臨界点 p のまわりで $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \partial_i$ に等しく，したがって $\nu(p, grad\, f) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$ である．

【定理 3.40】（**ポアンカレ・ホップ**（Poincaré-Hopf）**の定理**）　v をコンパクト多様体 M 上の非退化なベクトル場とすれば，

$$\sum_{\{p|v(p)=0\}} \nu(p, v) = \int_M e(M) \tag{3.138}$$

が成り立つ．とくに，

$$Eul(M) = \sum_{\{p|v(p)=0\}} \nu(p, v) \tag{3.139}$$

は非退化なベクトル場のとり方によらない．これを多様体 Mのオイラー数とよぶ．

証明 v の各零点 p の近傍 U^p で座標系を選び接バンドルを自明化する；$TU^p \cong U^p \times \mathbf{R}^n$.

ベクトル場 v は，p で可逆な微分 $L_p(v)$ をもち $v(p)=0$ を満たす U^p から $\mathbf{R}^n$ へのなめらかな写像を定義する．したがって v は U^pの開集合 V^pを $\mathbf{R}^n$の小球体 B に微分同相にうつす．Mの向きから誘導される V^pの向きと，$\mathbf{R}^n$ への微分同相写像 v によって誘導される V^p の向きは $\nu(p,v)$ だけ異なっている．開集合 V^pは互いに交わらないとしてよい．

Mのリーマン計量で，V^p上では，$\mathbf{R}^n$から微分同相写像 v によって誘導されたものと一致するものを選ぶ．Mはコンパクトだから，正定数 $\varepsilon > 0$があって，$M - \bigcup_p V^p$ 上 $\|v\| \geq \varepsilon$ が満たされる．

Uを TMのリーマン計量とそのレビ–チビタ接続に関するトム形式とする．各 $t > 0$ に対し，公式

$$\int_M v_t^* U = \int_M e(M) \tag{3.140}$$

が成り立つ．$\psi : \mathbf{R}_+ \to [0,1]$ を

$$\begin{aligned} \psi(s) &= 1 \qquad & s &< \varepsilon^2/4 \\ \psi(s) &= 0 \qquad & s &> \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{3.141}$$

を満たす任意のなめらかな関数とすれば，

$$\int_M v_t^* U = \int_M (1 - \psi(\|v\|^2)) v_t^* U + \int_M \psi(\|v\|^2) v_t^* U \tag{3.142}$$

が成り立つ．$v_t^* U$ は α_i を M 上の微分形式として

$$v_t^* U = e^{-t^2 \|v\|^2/2} \sum_{i=0}^{n} t^i \alpha_i \tag{3.143}$$

の形をしているので，$\|v\|^2 > \varepsilon^2/4$ のとき $t \to \infty$ で t の関数として急減少であり，(3.142) の右辺の第 1 項は t の急減少関数である．

第 2 項は V^p 上の積分の和である．V^pで計量と接続は自明であり $v = \sum_{i=1}^n x_i \partial_i$ であるから

$$v_t^* U\,|_{V^p} = t^n \nu(p,v) (2\pi)^{-n/2} e^{-t^2 \|x\|^2/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \tag{3.144}$$

となる．ゆえに

$$\int_{V^p} \psi(\|v\|^2) v_t^* = t^n \nu(p,v)(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \psi(\|x\|^2) e^{-t^2\|x\|^2/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (3.145)$$

である．変数変換 $x \to t^{-1}x$ を行って，

$$\lim_{t\to\infty} t^n (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \psi(\|x\|^2) e^{-t^2\|x\|^2/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \psi(0) = 1 \quad (3.146)$$

が得られる．v の零点 p にわたる和をとって定理が証明される． ■

上では v の零点がすべて非退化であることを仮定したが，v の零点が非退化を仮定せず，孤立点であることだけを仮定して同じ結果が得られる．そのためにはベクトル場 v の孤立零点での指数をきちんと定義しなければならない．

n 次元球面から n 次元球面への連続写像 $f: S^n \to S^n$ に対し，$f_*: H_n(S^n, \mathbf{Z}) \to H_n(S^n, \mathbf{Z})$ をその整係数ホモロジー群への誘導写像とし，$\iota \in H_n(S^n, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ を生成元とする．$f_*(\iota) = (\deg f)\iota$ で定義される整数 $\deg f$ を f の写像度とよぶ．これは 3.1 節で述べた巻数を n 次元に一般化したものである．

【定義 3.41】 ベクトル場 v の孤立零点 p での指数 $\nu(p,v)$ は，p のまわりの局所座標系を選んで球面 $S_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \|x\| = \varepsilon\}$ から，単位球面への

$$x \in S_\varepsilon \longrightarrow \|v(x)\|^{-1} v(x) \quad (3.147)$$

で定義される写像の写像度として定義される．

$\nu(p,v)$ はその定義に使われた局所座標系 ε のとり方によらず決まる整数である（図 9）．

v の零点のまわりで，小さい球体 V^pを選んで，$\|v\| > \varepsilon$ が $\bigcup_p V^p$ の補空間にあるようにする．$x \in V^p$を $v(x)$ に写す写像は正則値の集合の上で被覆写像であり，サード（Sard）の定理から，

$$\int_{V^p} \psi(\|v\|^2) v_t^* U = t^n \nu(p,v)(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbf{R}^n} \psi(\|v\|^2) e^{-t^2\|x\|^2/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \quad (3.148)$$

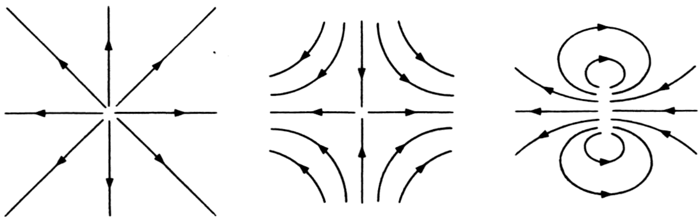


図 9

がわかる．これからつぎの定理 3.40 の一般化が得られる．

【定理 3.42】　v をコンパクトで向きづけられた偶数次元多様体 M 上の，孤立零点のみをもつベクトル場とすれば，

$$\sum_{\{p|v(p)=0\}} \nu(p,v) = \int_M e(M) \tag{3.149}$$

ここで上の定理と位相幾何学との関連を見ることにしよう．位相幾何学では多様体を**単体分割**（simplicial decomposition）して研究することが普通である．***q*** **次元単体**（q-dim. simplex）とは $q+1$ 次元ユークリッド空間の ***q*** **次元標準単体**（q-dim. standard simplex）とよばれる図形

$$\Delta^q = \{(t_1,\cdots,t_{q+1}) \in \mathbf{R}^{q+1} \mid t_1+\cdots+t_{q+1}=1,\ t_i \geq 0\ (1 \leq i \leq q+1)\} \tag{3.150}$$

と同相な位相空間のことである．

n 次元微分可能多様体は 0 次元から n 次元までの単体の集まりに分割されることが知られている．このような分割が 1 つ与えられた多様体を単体分割された多様体とよぶ．

とくに単体分割されたコンパクト多様体では，すべての q に対し q 次元単体の個数 N_q は有限である．位相幾何学を学んだ読者は，単体分割された n 次元微分可能多様体 M のオイラー数は交代和

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q N_q \tag{3.151}$$

で定義されることを知っているであろう．とくに(3.151)はMの単体分割の仕方によらないMの**位相不変量**（topological invariant）であることが知られている．

ここではこの(3.151)と$Eul(M)$との関係を定理3.42を用いて見いだし，それらが同じ幾何学的不変量を表していることを示してみよう．同時に(3.151)はMの単体分割の仕方によらないことが証明される．

定理3.42の等式(3.149)の右辺の$e(M)$の積分はベクトル場vにはよらない．したがってとくに左辺はベクトル場vにはよらない．ゆえに特別なベクトル場に対し，左辺の量を計算すれば，それはすべてのベクトル場に対する値を与えることになる．Mが単体分割されているとき，その分割からつぎのようなベクトル場をつくることができる．

q次元単体の点でq次元標準単体の点$t_1 = \cdots = t_{q+1} = \dfrac{1}{q+1}$に対応するものをその単体の重心とよぶ．$n$次元標準単体のベクトル場でその各$q$面の重心を特異点にもつ図10のようなベクトル場を考える．

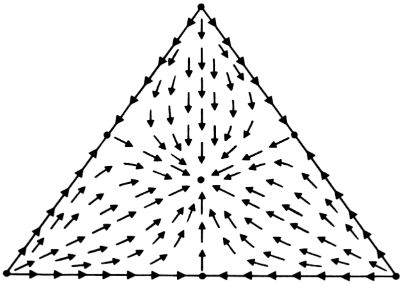


図 10

単体分割されたMに対し，各単体上でこのベクトル場をつくり適当になめらかにすれば，これらはうまく張り合わさってM上のベクトル場となる（図11）．

ベクトル場vはMの単体分割を構成する各q単体に対応してちょうど1つの特異点pで$\nu_p = (-1)^q$なるものをもつ．したがってベクトル場vに対し定理3.42の等式の左辺は，与えられた単体分割の$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q N_q$に等しい．こうしてわれわれ

はつぎの等式を証明したことになる.

$$\sum_{q=0}^{n}(-1)^q N_q = \int_M e(M) \tag{3.152}$$

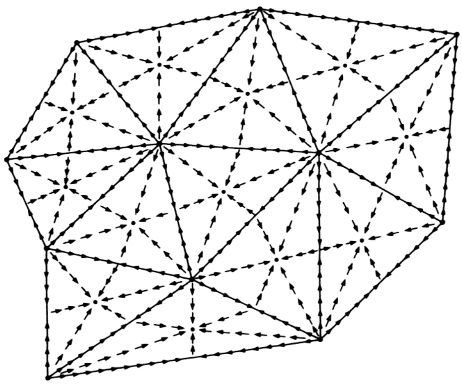


図 11

3.9　チャーン類と一次独立な切断の存在

$\mathcal{E} \to M$を向きづけられたn次元微分可能多様体M上のk次元複素ベクトルバンドルとする．$\mathcal{E}$の接続$\nabla^{\mathcal{E}}$に対応するチャーン類$c_i(\mathcal{E})$と，$\mathcal{E}$の切断の存在との関係を調べよう.

補題 3.14，(4) から，$c_k(\mathcal{E})$は実ベクトルバンドルとしての$\mathcal{E}$のオイラー類に等しい．したがって前節の結果によって，$c_k(\mathcal{E})$は$\mathcal{E}$の非自明な切断sから決まる$n-2k$次元部分多様体$s^{-1}(0)$の**ポアンカレ双対**（Poincaré dual）である.

つぎに第1チャーン類$c_1(\mathcal{E})$を考えよう．そのためにまず向きづけられた多様体M上の複素直線バンドル$\mathcal{L} \to M$を考える．$s : M \to \mathcal{L}$を$\mathcal{L}$のなめらかな切断で$s^{-1}(0)$がMの$n-2$次元部分多様体であるようなものとする．補題 3.14 の (4) により$c_1(\mathcal{L}) = e(\mathcal{L})$であるから，定理 3.39 により，$\mathcal{L}$の第1チャーン類$c_1(\mathcal{L})$は$s^{-1}(0)$のポアンカレ双対である.

M上のk次元複素ベクトルバンドル$\mathcal{E}$に対し，$\Lambda^k\mathcal{E}$を$\mathcal{E}$の行列式直線バンド

ルとよぶ．$\mathcal{E}$ の接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ から $\Lambda^k\mathcal{E}$ の接続が自然に誘導され，その曲率は $\nabla^{\mathcal{E}}$の曲率 $F^{\mathcal{E}}$のトレースとして得られる 2 次微分形式である．このことと第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{E})$ の定義（定義 3.6）から

$$c_1(\mathcal{E}) = c_1(\Lambda^k\mathcal{E}) \tag{3.153}$$

が成り立つ．$\{s_1,\cdots,s_k\}$ を $\mathcal{E}$ の k 個のなめらかな切断の組みとしよう．このとき $s = s_1 \wedge \cdots \wedge s_k$ は $\Lambda^k\mathcal{E}$ の切断を与え，

- $x \in s^{-1}(0) \Longleftrightarrow \{s_1(x),\cdots,s_k(x)\}$ は一次従属

となる．したがって定理 3.9 からつぎの定理が得られる．

【定理 3.43】 $\mathcal{E} \to M$を向きづけられたn次元多様体M上の k 次元複素ベクトルバンドルとする．$\{s_1,\cdots,s_k\}$ を $\mathcal{E}$ の k 個のなめらかな切断の組で，$\{s_1(x),\cdots,s_k(x)\}$ が一次従属になる点 $x \in M$の集合 $D_1(\mathcal{E})$ は，Mの $n-2$ 次元部分多様体であるとする．

このとき $D_1(\mathcal{E})$ は自然な向きづけをもち，$\mathcal{E}$ の第 1 チャーン類 $c_1(\mathcal{E})$ は $D_1(\mathcal{E})$ のポアンカレ双対である．

いたるところ一次独立な切断の組 $\{s_1,\cdots,s_k\}$ があれば，$\mathcal{E}$ は自明なバンドルであって $c_1(\mathcal{E}) = 0$ であるが，この定理はそれ以上に切断の組が一次独立でなくなるその度合が $c_1(\mathcal{E})$ の**双対ホモロジー類**（dual homology class）で表されることをいっている．この意味で，k 次元複素ベクトルバンドルの第 1 チャーン類は，k 個の一次独立な切断の存在に対する障害を表す．

これをさらに一般化する．つぎの補題の証明は読者の演習問題とする．

【補題 3.44】 E を k 次元複素ベクトル空間とする．E^i を E の i 個の直積集合として

$$D_i(E) := \left\{x = (x_1,\cdots,x_i) \in E^i \mid \{x_1,\cdots,x_i\} \text{ は一次従属 } \right\} \tag{3.154}$$

とおく．このとき D_i は E^i の（複素）余次元が $k-i+1$ の**複素部分代数多様体**（complex algebraic subvariety）である．

この補題を用いると微分位相幾何学の横断性定理からつぎのことがわかる．向きづけられたn次元多様体M上のk次元複素ベクトルバンドル$\mathcal{E} \to M$と$1 \le i \le k$に対し，$\mathcal{E}$の$k-i+1$個のなめらかな切断$\{s_1, \cdots, s_{k-i+1}\}$で，$\{s_1(x), \cdots, s_{k-i+1}(x)\}$が一次従属になる点$x \in M$の集合$D_i(\mathcal{E})$が，$M$の（実）$n-2i$次元部分多様体になるようなものが存在する．さらに$M$の向きと複素構造により，$D_i(\mathcal{E})$とその法バンドルには自然な向きづけが定まる．

【定理 3.45】 $\{s_1, \cdots, s_{k-i+1}\}$を，向きづけられた$n$次元多様体$M$上の$k$次元複素ベクトルバンドル$\mathcal{E}$の$k-i+1$個のなめらかな切断とする．$\{s_1(x), \cdots, s_{k-i+1}(x)\}$および$\{s_1(x), \cdots, s_{k-i}(x)\}$が一次従属になる点$x \in M$の集合をそれぞれ$D_{k-i+1}(\mathcal{E})$および$D_{k-i}(\mathcal{E})$とし，これらはそれぞれ$M$の向きづけられた$n-2i$次元および$n-2i-2$次元の部分多様体であるとする．

このとき$\mathcal{E}$の第iチャーン類$c_i(\mathcal{E})$は$D_{k-i+1}(\mathcal{E})$のポアンカレ双対である．

証明 切断の組$\{s_1, \cdots, s_{k-i}\}$は$M - D_{k-i}(\mathcal{E})$で一次独立であるから，バンドル$\mathcal{E}$を$M - D_{k-i}(\mathcal{E})$に制限したものは，$\mathcal{E}' \oplus \varepsilon^{k-i}$と分解する．ここに$\mathcal{E}'$は$M - D_{k-i}(\mathcal{E})$上の$i$次元ベクトルバンドルであり，$\varepsilon^{k-i}$は$\{s_1, \cdots, s_{k-i}\}$により張られる$k-i$次元の自明な部分ベクトルバンドルである．

∇'を$\mathcal{E}'$の任意の接続とし，∇'とε^{k-i}の自明な接続の直和によって$\mathcal{E}$に接続を入れれば，対応する第iチャーン形式は$c_i(\mathcal{E}')$に等しい．したがって補題 3.4 により，$c_i(\mathcal{E})$は$M - D_{k-i}(\mathcal{E})$で$c_i(\mathcal{E}')$に完全形式を除いて等しい．

$M - D_{k-i}(\mathcal{E})$において，切断s_{k-i+1}を分解$\mathcal{E} = \mathcal{E}' \oplus \varepsilon^{k-i}$によって$\mathcal{E}'$に射影したものを$s'_{k-i+1}$とする．$s'_{k-i+1}$は$\mathcal{E}'$の非自明な切断となり，$\{s_1, \cdots, s_{k-i+1}\}$が$M - D_{k-i+1}(\mathcal{E})$で一次独立であるから$(s'_{k-i+1})^{-1}(0) = D_{k-i+1}(\mathcal{E}) - D_{k-i}(\mathcal{E})$である．

$D_{k-i}(\mathcal{E})$はMの余次元$2i+2$の部分多様体であり，微分位相幾何学のアイソトピーと**一般の位置**（general position）の議論を用いれば，Mの任意の$2i$次元サイクルは，$D_{k-i}(\mathcal{E})$と交わらない$2i$次元サイクルに**ホモローグ**（homologous）になることがわかる．

したがってMの任意の$2i$次元サイクルと$D_{k-i+1}(\mathcal{E})$の交叉数をはかるとき，交叉点はつねに$D_{k-i+1}(\mathcal{E}) - D_{k-i}(\mathcal{E})$にあるとしてよい．ゆえに$D_{k-i+1}(\mathcal{E})$のポア

ンカレ双対を考えるとき，$D_{k-i}(\mathcal{E})$ は無視してよい．

上記の議論から $M - D_{k-i}(\mathcal{E})$ において，$c_i(\mathcal{E})$ は $D_{k-i+1}(\mathcal{E}) - D_{k-i}(\mathcal{E})$ の $M - D_{k-i}(\mathcal{E})$ での法バンドルのトム形式に完全形式を除いて等しい．したがって $D_{k-i}(\mathcal{E})$ と交わらない M の $2i$ 次元サイクル上での $c_i(\mathcal{E})$ の積分は，このサイクルと $D_{k-i+1}(\mathcal{E})$ の交叉数に等しい．ゆえに $c_i(\mathcal{E})$ は $D_{k-i+1}(\mathcal{E})$ のポアンカレ双対である． ■

定理 3.45 の証明から読者は，チャーン類はオイラー類の帰納的な一般化であることを納得されることと思う．また実ベクトルバンドルのポントリャーギン類に対しても同様の事柄が成り立つ．

4

一般化ラプラシアンと熱核

われわれが関心をもつディラック作用素は，多様体上のベクトルバンドルの接続を用いて定義される1階偏微分作用素であり，それから導かれる一般化ラプラシアンとよばれる2階偏微分作用素の研究が重要になる．ディラック作用素の定義はクリフォード代数が必要になるので第6章まで待つことにして，この章では共変微分と付随するラプラシアンについて調べることにしよう．

まず多様体上での一般化ラプラシアンの熱核を構成する．熱核から一般化ラプラシアンの逆作用素を与えるグリーン作用素がつくられる．熱核を用いてもとの一般化ラプラシアンの作用素としての性質が調べられる．具体的にはスペクトルが固有値のみからなることなどが導かれる．また熱核の漸近展開によって固有値分布に関するワイル定理が得られる．

4.1　多様体上の微分作用素

まず多様体上の微分作用素（differential operator）に関する一般的な事柄を述べる．

Mを多様体とし，$\mathcal{E}$ を M上のベクトルバンドルとする．$\Gamma(M, End(\mathcal{E}))$ の元は積によって $\Gamma(M,\mathcal{E})$ に作用する．また ∇ を $\mathcal{E}$ の任意の共変微分とし，X を M のベクトル場とすれば，共変微分 ∇_Xは $\Gamma(M,\mathcal{E})$ に微分作用素として作用する．

$\mathcal{E}$ の上の微分作用素の代数 $D(M,\mathcal{E})$ とは，$\Gamma(M,End(\mathcal{E}))$ の元と，すべての Xに対する ∇_Xによって生成される，$End(\Gamma(M,\mathcal{E}))$ の部分代数として定義される．代

数 $D(M,\mathcal{E})$ は

$$D_i(M,\mathcal{E}) = \Gamma(M, End(\mathcal{E})) \cdot span\left\{\nabla_{X_1} \cdots \nabla_{X_j} \mid j \le i\right\} \tag{4.1}$$

によって与えられる自然な**フィルターづけ**（filtration）をもつ．$D_i(M,\mathcal{E})$ の元を $\boldsymbol{i}$ **次微分作用素**（differential operator of degree i）とよぶ．

$S(TM)$ を，M 上の $x \in M$ でのファイバーが T_xM の**対称代数**（symmetric algebra）である，無限次元階数づきベクトルバンドルとする．

【命題 4.1】　微分作用素のフィルターつき代数に付随する階数つき代数

$$grD(M,\mathcal{E}) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k(M,\mathcal{E})/D_{k-1}(M,\mathcal{E}) \tag{4.2}$$

は，バンドル $S(TM) \otimes End(\mathcal{E})$ の切断の空間に同型である．同型

$$\sigma_k : grD(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, S^k(TM) \otimes End(\mathcal{E})) \tag{4.3}$$

はつぎの式で与えられる：$D \in D_k(M,\mathcal{E})$ ならば，$x \in M$ と $\xi \in T_x^*M$ に対し f を M 上の $df(x) = \xi$ となる C^∞ 関数として

$$\sigma_k(D)(x,\xi) = \lim_{t \to \infty} t^{-k}(e^{-itf} \cdot D \cdot e^{itf})(x) \in End(\mathcal{E}_x) \tag{4.4}$$

である．

証明　$X_1, \cdots, X_k$ を M のベクトル場 $a \in \Gamma(M, End(\mathcal{E}))$ とし，D を微分作用素 $a\nabla_{X_1} \cdots \nabla_{X_k}$ とする．**ライプニッツ規則**（Leipnitz rule）により，作用素 $e^{-itf} \cdot D \cdot e^{itf}$ は t に多項式的に依存した微分作用素であり，

$$(it)^k a(x) \langle X_1(x), \xi\rangle \cdots \langle X_k(x), \xi\rangle + O(t^{k-1}) \tag{4.5}$$

のかたちをもつ（$\langle\cdot,\cdot\rangle$ は TM と T^*M の対を表す）．したがって初項は 0 次の作用素であり，極限 $\lim_{t\to\infty} t^{-k}(e^{-itf} \cdot D \cdot e^{itf})(x)$ は，選ばれた $df(x) = \xi$ となる C^∞ 関数 f によらず決まり，$gr_k D(M, End(\mathcal{E}))$ から $\Gamma(M, S^k(TM) \otimes End(\mathcal{E}))$ への線形同型を定義する．■

【定義 4.2】 命題 4.1 によって得られる写像

$$\sigma_k : D_k(M, \mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, S^k(TM) \otimes End(\mathcal{E})) \tag{4.6}$$

を**主表象** (principal symbol) 写像とよぶ．

k 次微分作用素 $D \in D_k(M, \mathcal{E})$ に対し，$\sigma_k(D) \in \Gamma(M, S^k(TM) \otimes End(\mathcal{E}))$ を Dの**表象** (symbol) とよぶ．

定義からわかるように k 次微分作用素 D の表象 $\sigma_k(D)$ とは，平面波に D を作用させた効果を表したものである．フーリエ変換で D を**フーリエ積分作用素**（Fourier integral operator）として表すことができるが，そのとき D は各平面波に重み $\sigma(D)$ をつけて足し合わせたものとして表現される．

(4.4) を微分して

$$\sigma_k(D)(x, \xi) = \frac{(-i)^k}{k!}(ad\, f)^k D \tag{4.7}$$

が得られる．ただし $(ad\, f)D = fD - Df$ である．$D_i \in D_{k_i}(M, \mathcal{E})$, $i = 1, 2$ ならば

$$\sigma_{k_1+k_2}(D_1 D_2)(x, \xi) = \sigma_{k_1}(D)(x, \xi) \cdot \sigma_{k_2}(D)(x, \xi) \tag{4.8}$$

が成り立つ．k が D の次数のとき，$\sigma_k(D)$ をしばしば $\sigma(D)$ と書く．

$\Gamma(M, S(TM) \otimes End(\mathcal{E}))$ は，$\Gamma(T^*M, \pi^* End(\mathcal{E}))$ の元で T^*Mのファイバーに沿って多項式であるもののなす部分空間と同一視できる．

【定義 4.3】 次数 k の微分作用素 D に対し，余接バンドルの切断 $\sigma_k(D) \in \Gamma(T^*M, \pi^* End(\mathcal{E}))$ が開集合 $\{(x, \xi) \mid \xi \neq 0\}$ で可逆であるとき，D を**楕円型偏微分作用素**（elliptic partial differential operator）とよぶ．

4.2 ラプラシアンと一般化ラプラシアン

$\mathcal{E}$ をリーマン多様体 M上のベクトルバンドルとし，$\nabla^{\mathcal{E}} : \Gamma(M, \mathcal{E}) \to \Gamma(M, T^*M \otimes \mathcal{E})$ を接続とする．

Mはリーマン多様体であるから，余接バンドル T^*M はレビ–チビタ接続 ∇ をも

ち，バンドル $T^*M \otimes \mathcal{E}$ にテンソル積接続を定義することができる．したがって作用素

$$\nabla^{T^*M\otimes\mathcal{E}}\nabla^{\mathcal{E}} : \Gamma(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M \otimes \mathcal{E}) \tag{4.9}$$

が，2つの共変微分の結合として得られる．

Mのリーマン計量を任意の局所座標で $g = (g_{ij})$ とする．ここに $g_{ij}(x) = (\partial_i, \partial_j)_x$ である．$g^{-1} = (g^{ij})$ を g の逆行列とすれば，$g^{ij}(x) = (dx_i, dx_j)_x$ は M の余接バンドルの計量を与える．$g \in \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M)$ であるから $g^{-1} \in \Gamma(M, TM \otimes TM)$ である．

【定義 4.4】 $\Gamma(M,\mathcal{E})$ 上の2階微分作用素

$$\Delta s = -Tr(\nabla^{T^*M\otimes\mathcal{E}}\nabla^{\mathcal{E}} s) \tag{4.10}$$

を**ラプラシアン**（Laplacian）Δとよぶ．ただし，$Tr(S)$ は $S \in \Gamma(M, T^*M \otimes T^*M \otimes \mathcal{E})$ の計量 $g^{-1} = (g^{ij}) \in \Gamma(M, TM \otimes TM)$ による**縮約**（contraction）を表す．

$s \in \Gamma(M,\mathcal{E})$ で，Xと Y が2つのベクトル場ならば，

$$(\nabla^{T^*M\otimes\mathcal{E}}\nabla^{\mathcal{E}} s)(X,Y) = (\nabla^{\mathcal{E}}_X \nabla^{\mathcal{E}}_Y - \nabla^{\mathcal{E}}_{\nabla_X Y})s \tag{4.11}$$

となる．e_jを TMの局所正規直交枠とすれば，Δは

$$\Delta = -\sum_i (\nabla^{\mathcal{E}}_{e_i} \nabla^{\mathcal{E}}_{e_i} - \nabla^{\mathcal{E}}_{\nabla_{e_i} e_i}) \tag{4.12}$$

と書かれる．一方，M の点のまわりの座標系によって定義される枠 $\partial/\partial x_i$ に関しては Δ は

$$\Delta = -\sum_{ij} g^{ij}(x) \left(\nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_i} \nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_j} - \sum_k \Gamma^k_{ij} \nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_k} \right) \tag{4.13}$$

である．ここに Γ^k_{ij} は $\nabla_i \partial_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} \partial_k$ によって定義されるレビ–チビタ接続の成分である．

とくにリーマン多様体 M 上の関数は $\mathcal{E} = M \times \mathbf{R}$ の切断であり，$M \times \mathbf{R}$ に自明

な接続を与えたときのラプラシアンを，$C^\infty(M)$ に作用する**スカラーラプラシアン**（scalar Laplacian）という．スカラーラプラシアンは関数 $f \in C^\infty(M)$ に対し，

$$\Delta f = -Tr(\nabla df) = \sum_{ij} g^{ij}(x)\left(\partial_i\partial_j - \sum_k \Gamma^k_{ij}\partial_k\right) f \tag{4.14}$$

で与えられる．

$\mathcal{E}_1$と$\mathcal{E}_2$を M上の2つのバンドルで接続 $\nabla^{\mathcal{E}_1}$と $\nabla^{\mathcal{E}_2}$をもつものとし，$\Delta^{\mathcal{E}_1}$ と $\Delta^{\mathcal{E}_2}$ を対応するラプラシアンとする．$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2$ 上の接続 $\nabla^{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2} = \nabla^{\mathcal{E}_1} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\mathcal{E}_2}$ に関して定義されるラプラシアンを$\Delta^{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}$ とすれば，$s_i \in \Gamma(M, \mathcal{E}_i)$ に対し，

$$\Delta^{\mathcal{E}_1\otimes\mathcal{E}_2}(s_1 \otimes s_2) = (\Delta^{\mathcal{E}_1}s_1)\otimes s_2 - 2Tr(\nabla^{\mathcal{E}_1}s_1 \otimes \nabla^{\mathcal{E}_2}s_2) + s_1 \otimes \Delta^{\mathcal{E}_2}s_2 \tag{4.15}$$

となる．

ラプラシアンの表象は $\sigma_2(\Delta)(x,\xi) = \|\xi\|^2$ で与えられ，したがってラプラシアンは2階楕円型微分作用素である．ただし右辺は ξ のノルムの2乗 $\|\xi\|^2$による掛け算作用素を表す．

【定義 4.5】　$\mathcal{E}$ をリーマン多様体 M上のベクトルバンドルとする．$\mathcal{E}$ 上の2階微分作用素 H で

$$\sigma_2(H)(x,\xi) = \|\xi\|^2 \tag{4.16}$$

を満たすものを**一般化ラプラシアン**（generalized Laplacian）とよぶ．

一般化ラプラシアンは楕円型であり，任意の局所座標系で余接バンドルの計量 $g^{ij}(x) = (dx_i, dx_j)_x$を用いて

$$H = -\sum_{ij} g^{ij}(x)\partial_i\partial_j + (1\text{ 次以下の微分項}) \tag{4.17}$$

と書かれる．表象の定義により，一般化ラプラシアンをつぎのように特徴づけることができる．

【命題 4.6】　作用素 H は任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対し，

$$[[H,f],f] = -2\|df\|^2 \tag{4.18}$$

を満たすとき，またそのときに限り一般化ラプラシアンである．ただしここで f による掛け算作用素をそのまま f で表し，$[H,f]$ は作用素の交換子積を表すものとする．

任意の一般化ラプラシアンは，ある接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ に付随するラプラシアン $\Delta^{\mathcal{E}}$ と，バンドル $End(\mathcal{E})$ のある切断 F によって，$\Delta^{\mathcal{E}}+F$ のかたちに書かれることを示そう．

【命題 4.7】 H がベクトルバンドル $\mathcal{E}$ 上の一般化ラプラシアンならば，$\mathcal{E}$ 上の接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ があって，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し，$[H,f]$ はスカラーラプラシアン Δ を用いて，

$$[H,f] = -2\left\langle grad\, f, \nabla^{\mathcal{E}}\right\rangle + \Delta f \tag{4.19}$$

と書かれる微分作用素である（ただし右辺の $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は TM と T^*M の対によって定義される）．さらに，$F = H - \Delta^{\mathcal{E}}$ は 0 次の作用素である．

証明　一般化ラプラシアンの定義から，任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$-H(fs) + f(Hs) + (\Delta f)s$$

は f の 1 階微分と s の 1 階以下の微分を含むものになる．そこで作用素

$$\nabla^{\mathcal{E}} : \Gamma(M,\mathcal{E}) \longrightarrow \Omega^1(M,\mathcal{E})$$

を

$$\left\langle f_0\, grad\, f_1, \nabla^{\mathcal{E}} s\right\rangle = \frac{1}{2} f_0\left(-H(f_1 s) + f_1(Hs) + (\Delta f_1)s\right) \tag{4.20}$$

が任意の $f_0, f_1 \in C^\infty(M)$ に対して成り立つように定義する．左辺について

$$\left\langle f_0\, grad\,(f_1 f_2), \nabla^{\mathcal{E}} s\right\rangle = \left\langle f_0 f_1\, grad\, f_2 + f_0 f_2\, grad\, f_1, \nabla^{\mathcal{E}} s\right\rangle \tag{4.21}$$

が成り立つが，関係式

$$\Delta(f_1 f_2) = (\Delta f_1) f_2 - 2(df_1, df_2) + f_1(\Delta f_2) \tag{4.22}$$

と，公式 $[[H,f_1],f_2] = -2(df_1, df_2)$ から，右辺に対しても同様の関係が成り立ち，

この意味で上の定義は両立している．

$\nabla^{\mathcal{E}}$ はバンドル $\mathcal{E}$ の接続であることをいおう．式

$$\begin{aligned}\left[\left\langle grad\, f, \nabla^{\mathcal{E}}\right\rangle, h\right] &= \left[-\frac{1}{2}[H,f] + \frac{1}{2}\Delta f, h\right] \\ &= -\frac{1}{2}\left[[H,f], h\right] = \langle grad\, f, dh\rangle \end{aligned} \tag{4.23}$$

が任意の f について成り立つので，$\nabla^{\mathcal{E}} h = h\nabla^{\mathcal{E}} + dh$ が $\nabla^{\mathcal{E}}$ と $h \in C^\infty(M)$ による掛け算作用素の間に成り立つ．ゆえに $\nabla^{\mathcal{E}}$ は $\mathcal{E}$ の接続である．

また $[H,f]$ も $[\Delta^{\mathcal{E}}, f]$ もともに $-2\left\langle grad\, f, \nabla^{\mathcal{E}}\right\rangle + \Delta f$ に等しいので，f を M 上の任意のなめらかな関数とすれば，

$$\left[H - \Delta^{\mathcal{E}}, f\right] = 0 \tag{4.24}$$

となり，したがって $F = H - \Delta^{\mathcal{E}}$ は 0 次の作用素である． ■

4.2.1 形式的共役

$|\Omega|^s$ を多様体 M の s 密度のバンドルとし，とくに $|\Omega| = |\Omega|^1$ と表す（2.3.3 項参照）．

$s_1 \in \Gamma_c(M, \mathcal{E})$, $s_2 \in \Gamma(M, \mathcal{E}^* \otimes |\Omega|)$ に対し，それらの各点でのスカラー積 $\langle s_1, s_2\rangle_x$ は密度バンドル $|\Omega|$ の切断となり，積分されて 2 つの切断の対である数

$$\int_M \langle s_1, s_2\rangle \tag{4.25}$$

を与える．

ゆえに $\mathcal{E}$ をベクトルバンドル，$\mathcal{E}^*$ を双対ベクトルバンドルとすれば，$\mathcal{E}$ のコンパクト台をもつ切断の空間 $\Gamma_c(M, \mathcal{E})$ は $\mathcal{E}^* \otimes |\Omega|$ の切断の空間と自然に対になっている．

とくに $\mathcal{E}$ がエルミートバンドルならば，空間 $\Gamma_c(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$ は自然な内積をもつ．

【定義 4.8】（形式的共役と対称作用素）

(1) $\mathcal{E}_1$ と $\mathcal{E}_2$ を M 上の 2 つのベクトルバンドル，$D : \Gamma(M, \mathcal{E}_1) \to \Gamma(M, \mathcal{E}_2)$

を微分作用素とする．D の**形式的共役**（formal adjoint）D^*とは微分作用素

$$D^* : \Gamma(M, \mathcal{E}_2^* \otimes |\Omega|) \longrightarrow \Gamma(M, \mathcal{E}_1^* \otimes |\Omega|) \tag{4.26}$$

で $s \in \Gamma_c(M, \mathcal{E}_1)$ と $t \in \Gamma(M, \mathcal{E}_2^* \otimes |\Omega|)$ に対し，

$$\int_M \langle Ds, t \rangle = \int_M \langle s, D^* t \rangle \tag{4.27}$$

が成り立つもののことである．

(2) $\mathcal{E}$ がエルミートベクトルバンドルで，D が $\Gamma(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$ に作用する微分作用素であり $D = D^*$が成り立つとき，D は**対称**（symmetric）であるという．

形式的共役 D^* の表象は $\sigma_i(D^*) = \sigma_i(D)^* \otimes 1_{|\Omega|}$に等しい．

バンドル $|\Omega|$ は標準的な自明化をもたないが，リーマン多様体の場合には標準的ないたるところ消えないリーマン密度 $|v_M| \in \Gamma(M, |\Omega|)$ がある（第2章定義2.27）．$|v_M|$ による積で $\Gamma(M, \mathcal{E})$ と $\Gamma(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|)$ を同一視すれば，$D : \Gamma(M, \mathcal{E}_1) \to \Gamma(M, \mathcal{E}_2)$ の形式的共役は作用素

$$D^* : \Gamma(M, \mathcal{E}_2^*) \longrightarrow \Gamma(M, \mathcal{E}_1^*)$$

と見なしてよく，密度バンドルを表面から消すことができる．

一例としてリーマン多様体上で，外微分 $d : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^{\bullet+1}(M)$ の形式的共役を考えてみよう．

d の形式的共役はバンドル $\Lambda^{\bullet+1}TM \otimes |\Omega|$ からバンドル $\Lambda^\bullet TM \otimes |\Omega|$ への作用素となる．リーマン計量を用いてバンドル $\Lambda^\bullet T^*M$とバンドル $\Lambda^\bullet TM \otimes |\Omega|$ の同一視を行って，d の形式的共役を $\Omega^{\bullet+1}(M)$ から $\Omega^\bullet(M)$ への写像と同一視することができる．これを

$$d^* : \Omega^{\bullet+1}(M) \longrightarrow \Omega^\bullet(M)$$

と表せば，d^*は M上のコンパクト台をもつ微分形式 α, β に対し

$$\int_M (d\beta, \alpha)\, |v_M| = \int_M (\beta, d^*\alpha)\, |v_M| \tag{4.28}$$

によって定義されることがわかる．

とくに α が 1 形式ならば，$d^*\alpha$ は α の**発散**（divergence）とよばれる関数である．上の式で $\beta = 1$ とおいてコンパクト台をもつ 1 形式 α に対し，

$$\int_M d^*\alpha\,|v_M| = 0 \tag{4.29}$$

が成り立つ．

α が 1 形式ならば，関数 $Tr(\nabla\alpha)$ は e_iを TMの局所正規直交枠として

$$Tr(\nabla\alpha) = \sum_i e_i\alpha(e_i) - \alpha(\nabla_{e_i}e_i) \tag{4.30}$$

で与えられる．

【命題 4.9】 1 形式の発散は式

$$d^*\alpha = -Tr(\nabla\alpha) \tag{4.31}$$

で与えられる．ゆえに，任意のコンパクト台をもつ C^1 1 形式 α に対し，

$$\int_M Tr(\nabla\alpha)\,|v_M| = 0 \tag{4.32}$$

が成り立つ．

証明　X が M 上のベクトル場ならば，

$$\nabla X \in \Gamma(M, T^*M \otimes TM) \cong \Gamma(M, End(TM)) \tag{4.33}$$

は TMの自己準同型写像であり，$Y \in \Gamma(M, TM)$ に $(\nabla X)\cdot Y = \nabla_Y X$ではたらく．$\nabla$ はトーションをもたないので，

$$L(X)Y = [X, Y] = \nabla_X Y - (\nabla X)Y \tag{4.34}$$

であり，$|v_M|$ がレビ–チビタ接続で保たれることを用いれば

$$L(X)\,|v_M| = Tr(\nabla X)\,|v_M| \tag{4.35}$$

がわかる．$f \in C^\infty(M)$ に対し，(2.65) から $\displaystyle\int_M L(X)(f\,|v_M|) = 0$ であり

$$\int_M X(f)\,|v_M| = -\int_M Tr(\nabla X)f\,|v_M| \tag{4.36}$$

となる．α を M のリーマン計量のもとで X に対応する M 上の1形式とすれば，$X(f)=(\alpha, df)$ であり，

$$\int_M (\alpha, df)\,|v_M| = \int_M X(f)\,|v_M| = -\int_M Tr(\nabla\alpha)f\,|v_M| \tag{4.37}$$

である．$f=1$ として (4.32) が得られる． ■

つぎの命題は，発散に対する上の公式を任意の次数の $d^*\alpha$ に対する公式に拡張したものである．

【命題 4.10】 $\iota : \Gamma(M, T^*M \otimes \Lambda T^*M) \to \Gamma(M, \Lambda T^*M)$ を Mのリーマン計量によって定義される微分形式の上の縮約作用素とする．このとき，

$$d^* = -\iota \circ \nabla^{\Lambda T^*M} \tag{4.38}$$

が成り立つ．

証明 レビ–チビタ共変微分はトーションをもたないので，命題 2.23 から

$$d = \wedge \circ \nabla$$

である．$\beta_p \in \Omega^p(M)$, $\beta_{p+1} \in \Omega^{p+1}(M)$ とし，α を

$$\alpha(X) = (\beta_p, \iota(X)\beta_{p+1})$$

で与えられる1形式とする．ライプニッツ規則と，各点 $x \in M$ で $\wedge^* = \iota$ が成り立つことを用いて，

$$(\wedge \circ \nabla\beta_p, \beta_{p+1})_x = -(\beta_p, \iota \circ \nabla\beta_{p+1})_x + Tr(\nabla\alpha)_x \tag{4.39}$$

がわかる．M上で積分すれば $Tr(\nabla\alpha)$ が消え命題を得る． ■

さてラプラシアン$\Delta^{\mathcal{E}}$の形式的共役を計算しよう．

リーマン多様体の上の s 密度のバンドル $|\Omega|^s$は，自然な切断 $|v_M|^s$をもち，また $|v_M|^s$を保つ自然な接続をもつ．

バンドル $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^s$ の接続 $\nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^s}$ に付随するラプラシアンを $\Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^s}$ とすれば，

$$\Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^s}(\phi\,|v_M|^s) = (\Delta^{\mathcal{E}}\phi)\,|v_M|^s \tag{4.40}$$

である．

$\int_M \langle s_1, s_2\rangle$ を，コンパクト台をもつバンドル $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ の切断 s_1 と，バンドル $\mathcal{E}^*\otimes|\Omega|^{1/2}$ の切断 s_2 の間の自然な対合とする．バンドル $\mathcal{E}^*$ の上では，$\mathcal{E}$ の接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ の双対接続 $\nabla^{\mathcal{E}^*}$ を考える．

【命題 4.11】 s_1 が $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ のコンパクト台をもつ C^2 切断で，s_2 が $\mathcal{E}^*\otimes|\Omega|^{1/2}$ の切断ならば

$$\begin{aligned}\int_M \left\langle \Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, s_2\right\rangle &= \int_M \left\langle s_1, \Delta^{\mathcal{E}^*\otimes|\Omega|^{1/2}} s_2\right\rangle \\ &= \int_M Tr\left\langle \nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, \nabla^{\mathcal{E}^*\otimes|\Omega|^{1/2}} s_2\right\rangle \end{aligned}\tag{4.41}$$

が成り立つ．ここに最後の内積は $T^*M\otimes\mathcal{E}$ と $T^*M\otimes\mathcal{E}^*$ の間の自然な対によって定義される．

証明 密度 $\left\langle \nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, s_2\right\rangle_x$ にレビ–チビタ共変微分 ∇ を適用すれば，$T^*M\otimes T^*M$ の切断

$$\begin{aligned}&\nabla\left\langle \nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, s_2\right\rangle_x \\ &= \left\langle \nabla^{T^*M\otimes\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}}\nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, s_2\right\rangle_x + \left\langle \nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, \nabla^{\mathcal{E}^*\otimes|\Omega|^{1/2}} s_2\right\rangle_x \end{aligned}\tag{4.42}$$

を得る．ゆえに，

$$\begin{aligned}&Tr\left(\nabla\left\langle \nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, s_2\right\rangle_x\right) \\ &= -\left\langle \Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, s_2\right\rangle_x + Tr\left\langle \nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, \nabla^{\mathcal{E}^*\otimes|\Omega|^{1/2}} s_2\right\rangle_x \end{aligned}\tag{4.43}$$

となる．命題 4.9 から $Tr\left(\nabla\left\langle \nabla^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} s_1, s_2\right\rangle_x\right)$ は M 上の積分で消える． ■

$\mathcal{E}$ がエルミート計量をもてば，バンドル $\mathcal{E}^*$ は自然に $\mathcal{E}$ と同一視でき，空間 $\Gamma(M, \mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ に自然な内積がはいる．この場合上の命題からつぎの結果が得ら

れる.

【系 4.12】 $\mathcal{E}$ の接続 ∇ が $\mathcal{E}$ のエルミート計量と両立すれば，$\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ 上のラプラシアン $\Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}}$ は $\Gamma(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ の内積に関し対称である.

命題 4.11 を自明なバンドル $\mathcal{E}=M\times\mathbf{C}$ に適用して，とくにスカラーラプラシアンは

$$\int_M (\Delta f, f)\,|v_M| = \int_M (df, df)\,|v_M| \tag{4.44}$$

を満たすことがわかる，つまりスカラーラプラシアンは

$$\Delta f = d^* df$$

で与えられる.

また命題 4.11 と系 4.12 の結果により，ラプラシアンの共役については半密度による公式を書くのがより自然であることがわかるであろう.

4.3　一般化ラプラシアンの熱核

一般化ラプラシアンの熱核の構成と漸近展開を調べる．ラプラシアンの熱核は多様体の無限小幾何学と大域的な性質を結びつけるもっとも重要な手段である.

4.3.1　ユークリッド空間上の熱核

まずユークリッド空間上の**熱方程式**（heat equation）の解を思い出そう．$V=\mathbf{R}$ を 1 次元ユークリッドベクトル空間とし，

$$\Delta = -\frac{d^2}{dx^2} \tag{4.45}$$

をラプラシアンとする.

$$q_t(x,y) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-y)^2/4t} \tag{4.46}$$

とおけば，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Delta_x\right) q_t(x,y) = 0 \tag{4.47}$$

である．ここで，Δ_xは変数 x についてのラプラシアンを表す．

【補題 4.13】　ガウス積分（Gaussian integral）

$$a(k) = (4\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-v^2/4}v^k dv \tag{4.48}$$

は公式

$$a(k) = \begin{cases} \dfrac{k!}{(k/2)!} & k \text{ even} \\ 0 & k \text{ odd} \end{cases}$$

で与えられる．

証明　つぎの母関数

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}a(k) = (4\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-v^2/4+tv} \tag{4.49}$$

を考える．変数変換 $u = v - 2t$ によって，この積分は

$$A(t) = (4\pi)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-u^2/4+t^2}du = e^{t^2} \tag{4.50}$$

に等しくこれから補題は容易に導かれる．■

C^l 関数のノルムを

$$\|\phi\|_l = \sup_{k\le l}\sup_{x\in\mathbf{R}}\left|\frac{d^k}{dx^k}\phi(x)\right| \tag{4.51}$$

で定義する．とくに $\|\cdot\|_0$ を $\|\cdot\|$ と書くこともある．

Q_tを $\mathbf{R}$ 上の関数にはたらく作用素で，

$$\begin{aligned}(Q_t\phi)(x) &= \int_{\mathbf{R}} q_t(x,y)\phi(y)dy \\ &= (4\pi t)^{-1/2}\int_{\mathbf{R}} e^{-(x-y)^2/4t}\phi(y)dy \end{aligned} \tag{4.52}$$

で定義されるものとする．

【命題 4.14】　l を偶数整数とする．ϕ が $\mathbf{R}$ 上の関数で $\|\phi\|_l$ が有限であるとすれば，

$$\left\| Q_t\phi - \sum_{k=0}^{l/2} \frac{(-t)^k}{k!}\Delta^k \phi \right\| \leq O(t^{l/2+1}) \tag{4.53}$$

証明　変数変換 $y \to x + t^{1/2}v$ により，

$$(Q_t\phi)(x) = (4\pi)^{-1/2} \int_{\mathbf{R}} e^{-v^2/4t}\phi(x + t^{1/2}v)dv \tag{4.54}$$

となる．$\|\phi\|_{l+1} < \infty$ ならば，テイラーの公式から

$$\phi(x+v) = \sum_{k=0}^{l} \frac{v^k}{k!}\phi^{(k)} + \frac{v^{l+1}}{l!}\int_0^1 (1-t)^l \phi^{(l+1)}(x+tv)dt \tag{4.55}$$

であり，

$$\left\| \phi(x + t^{1/2}v) - \sum_{k=0}^{l} \frac{t^{k/2}v^k}{k!}\phi^{(k)}(x) \right\| \leq \frac{|v|^{l+1}\, t^{(l+1)/2}}{l!} \|\phi\|_{l+1} \tag{4.56}$$

である．したがって，

$$\left\| Q_t\phi - \sum_{k=0}^{l} a(k)\frac{t^{k2}}{k!}\phi^{(k)}(x) \right\| \leq O(t^{(l+1)/2}) \tag{4.57}$$

となり，これと補題4.13の $a(k)$ についての公式により命題が導かれる．　■

4.3.2　多様体上の熱核

ユークリッド空間上の熱核 $q_t(x,y)$ と類似のものが任意のコンパクトリーマン多様体の上で存在し，命題4.14の類似が成り立つことを示すのがこの節の目的である．

熱核は多様体 M 上に $t=0$ での熱分布 f（初期条件とよぶ）を与えた場合の，時刻 t での熱分布を f への積分作用素で与える積分核である．このときの積分測度はリーマン多様体上の密度によって与えられる．

ユークリッド空間と違って多様体上では密度の表示は局所座標によって異なり，テンソルとして扱われなければならない．これを幾何学的に便利なように局所座標によらない不変な形で表示するためには，積分される関数 f と積分核の両方に半密度（第2章2.3.3項）を掛けたものを考え，積分を半密度の間のペアリング（**R**

への対写像）と見なしたほうが都合が良い．つまり熱分布を熱分布半密度と解釈するのである．

そこで熱核は多様体 $M \times M$ 上の関数ではなく半密度として定義する．

$\mathcal{E}, \mathcal{F}$ を M 上のベクトルバンドルとする．$pr_1, pr_2 : M \times M \to M$ をそれぞれ第1，第2成分への射影とし

$$\mathcal{E}\hat{\otimes}\mathcal{F} = pr_1^*\mathcal{E} \otimes pr_2^*\mathcal{F} \tag{4.58}$$

と書く．

$\Gamma(M \times M, (\mathcal{F} \otimes |\Omega|^{1/2})\hat{\otimes}(\mathcal{E}^* \otimes |\Omega|^{1/2}))$ の元 p のことを**核関数**（kernel function）または**核**（kernel）とよぶ．

p を積分核とする積分作用素

$$P : \Gamma^{-\infty}(M, (\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})) \longrightarrow \Gamma(M, (\mathcal{F} \otimes |\Omega|^{1/2})) \tag{4.59}$$

を

$$(Ps)(x) = \int_{y \in M} p(x, y)s(y) \tag{4.60}$$

と定義する．

p がなめらかなとき P を**平滑化作用素**（smoothing operator）とよぶ．2つのなめらかな核 p_1, p_2 と，対応する積分作用素 P_1, P_2 に対し

$$p(x, y) = \int_{z \in M} p_1(x, z)p_2(z, y) \tag{4.61}$$

はまた，なめらかな核となり，結合 P_1P_2 の積分核になる．

さて一般化ラプラシアンに対しその熱核の定義をしよう．

【定義 4.15】　$\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2}$ の上の一般化ラプラシアン H に対し，つぎの条件を満たす $\mathbf{R}_+ \times M \times M$ 上の $(\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})\hat{\otimes}(\mathcal{E}^* \otimes |\Omega|^{1/2})$ の連続切断 $p_t(x, y)$ を H の**熱核**（heat kernel）という．

(1)　$p_t(x, y)$ は t について C^1，$\dfrac{\partial p_t(x, y)}{\partial t}$ は (t, x, y) について連続

(2)　$p_t(x, y)$ は x について C^2，$\dfrac{\partial^2 p_t(x, y)}{\partial x \partial y}$ は連続

(3)　$p_t(x, y)$ は熱方程式

$$(\partial_t + H_x)p_t(x,y) = 0 \tag{4.62}$$

を満たす.

(4) $p_t(x,y)$ は $t=0$ で境界条件を満たす. すなわち s を $\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2}$ のなめらかな切断とするとき

$$\lim_{t\to 0} P_t s = s \tag{4.63}$$

が成り立つ.（ただし極限は $\|s\|_0 = \sup_{x\in M}\|s(x)\|$ でとる.）

4.3.3　ラプラシアンの公式

一般化ラプラシアンの熱核の構成のための準備として, つぎの補題で, 点 $x_{(0)}$ のまわりの正規座標 $T_{x_{(0)}}M \ni x \to \exp_{x_{(0)}} x$ での半密度バンドル上のラプラシアンに対する公式をまとめる.

これらのうちに 2.4.2 項で定義された $T_{x_{(0)}}M$上の関数 $j(x)$ に関するものが含まれる. $j(x)$ は, 指数写像 $\exp_{x_{(0)}}$ による Mの体積形式の引き戻しが $j(x)dx$ によって与えられるものとして, つまり,

$$j(x) = \left|\det(d_x \exp_{x_{(0)}})\right| = \det{}^{1/2}(g_{ij}(x)) \tag{4.64}$$

として定義されたことを思い起こそう.

$\mathfrak{R}$ を $T_{x_{(0)}}M$上の動径ベクトル場とする（2.4.2 項）. 関数と半密度の上のラプラシアンを Δ で表す.

また $|dx|^s$を正規座標系上 $|dx|^s(\partial_1 \wedge \cdots \wedge \partial_n) = 1$ で定義される密度とする.

【命題 4.16】 $x_{(0)}$のまわりでの正規座標 x で, つぎの式が成り立つ.

(1) $f \in C^\infty(M)$ に対し, $\nabla(f\,|dx|^{1/2}) = \left(df - \dfrac{1}{2}f \cdot d(\log j)\right)|dx|^{1/2}$

(2) $\Delta(f\,|dx|^{1/2}) = \left((j^{1/2} \circ \Delta \circ j^{-1/2})f\right)|dx|^{1/2}$

(3) $\Delta\|x\|^2 = -2(n + \mathfrak{R}(\log j))$

(4) $q_t(x)$ を $x_{(0)}$のまわりでの Mの正規座標系上で

$$q_t(x) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\|x\|^2/4t}\,|dx|^{1/2}$$

によって与えられる時間 t に依存した半密度とする．このとき，

$$\left(\partial_t + \Delta - j^{1/2}(\Delta \cdot j^{-1/2})\right) q_t = 0 \tag{4.65}$$

が成り立つ．

証明　(1) と (2) は公式

$$\nabla(j^{1/2}\,|dx|^{1/2}) = \nabla\,|v_M|^{1/2} = 0 \tag{4.66}$$

からでる．

(3) を証明するために部分積分を用いる．まず第 2 章命題 2.31 の (3) から $\phi \in C_c^\infty(T_{x_{(0)}}M)$ に対して

$$(d\,\|x\|^2\ ,d\phi\,)/2 = \Re\phi$$

が成り立つことに注意する．これから

$$\int(\phi\,,\Delta\,\|x\|^2)j(x)dx = \int(d\phi\,,d\,\|x\|^2)j(x)dx = 2\int(\Re\phi)j(x)dx \tag{4.67}$$

が得られる．ベクトル場 $\Re$ の密度 $|dx|$ に関する共役は $-n-\Re$ であるから，

$$\int(\phi\,,\Delta\,\|x\|^2)j(x)dx = -2\int(n+\Re(\log j))\phi(x)j(x)dx \tag{4.68}$$

となって (3) が得られる．

(4) についてはライプニッツ規則により，$\Delta(e^{-\|x\|^2/4t}\,|dx|^{1/2})$ は

$$\Delta(e^{-\|x\|^2/4t})\,|dx|^{1/2} + t^{-1}e^{-\|x\|^2/4t}\nabla_{\Re}\,|dx|^{1/2} + e^{-\|x\|^2/4t}\Delta\,|dx|^{1/2} \tag{4.69}$$

に等しく，また $\Delta(e^{-\|x\|^2/4t})$ は

$$\frac{1}{4t}e^{-\|x\|^2/4t}\left(2(n+\Re(\log j)) - t^{-1}\,\|x\|^2\right) \tag{4.70}$$

に等しい．(1) から $\nabla_{\Re}|dx|^{1/2} = (-1/2)\Re(\log j)|dx|^{1/2}$ であるから，これらの公式から，$\left(\partial_t + \Delta - j^{1/2}(\Delta \cdot j^{-1/2})\right) q_t$ が消えることが容易にわかる．■

4.3.4　形式解の構成

多様体上の一般化ラプラシアンの熱核の構成をしてその存在を示す．熱核の構

成は

$$\text{形式解} \Longrightarrow \text{近似解} \Longrightarrow \text{真の解}$$

の順を踏んでなされる．

真の解の構成の準備として形式解を構成するが，形式解は単に真の解の構成のための補助手段ではない．それどころか熱核の形式解は局所指数定理の証明の核心の部分をなす．

数学的整合性から真の解の存在の証明と構成はもちろん必要不可欠であるが，最終的な指数公式そのものは熱核の漸近展開から得られ，形式解の計算に含まれる．そのために形式解の計算が指数公式の本質的な部分を含んでいると考えてよい．

形式解の構成は代数的な構造をもつ．読者は定理 4.19 での形式解の計算の数学的な内容をくみとってもらいたい．

$H = \Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} + F$ をコンパクト多様体 M 上のバンドル $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ の上の一般化ラプラシアンとする．∇ を $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ の接続とする．

$|v_M|^{1/2}$ で M のリーマン計量に付随した半密度を表す．また $M\times M$ の点を座標 (x,y) で表すとき，第 1,2 成分の M のリーマン計量に付随した半密度をそれぞれ $|v_{Mx}|^{1/2}$, $|v_{My}|^{1/2}$ で表すことにする．

形式的に

$$k_t(x,y) = q_t(x,y)\sum_{i=0}^{\infty} t^i \Phi_i(x,y,H)\left|v_{My}\right|^{1/2} \tag{4.71}$$

という形の級数を考える．

ここに $\Phi_i(x,y,H)$ は $M\times M$ の対角集合の近傍で定義されたバンドル $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}^*$ の C^∞ 切断であり，$q_t(x,y)$ はユークリッド熱核を表す，すなわち y のまわりの正規座標系 $\exp_y x$, $x\in T_yM$ を用いて

$$\begin{aligned} q_t(x,y) &= (4\pi t)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/4t}\,|dx|^{1/2} \\ &= (4\pi t)^{-n/2}e^{-d(x,y)^2/4t}j(x)^{-1/2}\,|v_{Mx}|^{1/2} \end{aligned} \tag{4.72}$$

と表されるものである．

$y\in M$ を固定し，q_t をバンドル $|\Omega|^{1/2}$ の切断 $x\to q_t(x,y)$ と見なす．また $y\in M$ のまわりの正規座標系 x の関数 $x\to j(x)^{1/2}$ を $j^{1/2}$ と書く．

(4.71) は t のべき級数であるから，収束性を度外視して ∂_t は単に t のべきを 1

つ下げる代数演算とみなせば，熱方程式

$$(\partial_t + H_x)k_t(x,y) = 0 \tag{4.73}$$

は $\Phi_i(x,y)$ と $\Phi_{i+1}(x,y)$ との間の関係を与え，それにより Φ_0 から出発して Φ_i を順に決めていくことができる．それが形式解である．

【命題 4.17】　$\Gamma(M,\mathcal{E})$ の作用素

$$s \longrightarrow |v_M|^{-1/2} \cdot H \cdot s\,|v_M|^{1/2}$$

を単に H と書く．$y \in M$ のまわりの正規座標系をとり，B を $y \in M$ の近傍における $\mathcal{E}$ の切断に作用する作用素

$$B = j^{1/2} \circ H \circ j^{-1/2} \tag{4.74}$$

とする．このとき，t を助変数とする $\mathcal{E}$ の切断 s_t に対し，

$$(\partial_t + H)s_t q_t = ((\partial_t + t^{-1}\nabla_{\Re} + B)s_t)q_t \tag{4.75}$$

が成り立つ．

証明　$t \to s_t$を，$\mathbf{R}_+$から y の近傍で定義された $\mathcal{E}$ の C^∞切断の空間への C^∞写像とする．

$$(\partial_t + H)(s_t q_t) = ((\partial_t + H)s_t)q_t - 2(\nabla s_t, \nabla q_t) + s_t((\partial_t + \Delta)q_t) \tag{4.76}$$

である．ここに Δ はスカラーラプラシアンである．

命題 4.16 により，最後の 2 つの項において

$$-2\nabla q_t = \left(t^{-1}\Re + d(\log j)\right) q_t \tag{4.77}$$

$$(\partial_t + \Delta)q_t = j^{1/2}(\Delta j^{-1/2})q_t \tag{4.78}$$

が成り立つ．これから

$$(\partial_t + H)(s_t q_t) = \left((\partial_t + H + t^{-1}\nabla_{\Re} + \nabla_{d\log j} + j^{1/2}(\Delta j^{-1/2}))s_t\right) q_t \tag{4.79}$$

となる．したがって

$$j^{1/2} \circ H \circ j^{-1/2} = H + \nabla_{d \log j} + j^{1/2}(\Delta j^{-1/2}) \tag{4.80}$$

から (4.75) が得られる．■

命題 4.17 を用いて形式解を正規座標の言葉でつぎのように定義することができる．

【定義 4.18】 $\Phi_t(x,y)$ を，$M \times M$ の対角集合の近傍で定義されたバンドル $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}^*$ の C^∞ 切断を係数にもつ t の形式べき級数とする．x を y のまわりの正規座標とし，$q_t(x,y)$ を (4.72) のユークリッド熱核とする．

$$q_t(x,y)\Phi_t(x,y)\left|v_{My}\right|^{1/2}$$

が y のまわりの熱方程式の**形式解**（formal solution）であるとは，$x \to \Phi_t(x,y)$ が y の近傍での $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}_y^*$ の切断と考えたとき，方程式

$$(\partial_t + t^{-1}\nabla_{\mathfrak{R}} + B)\Phi_t(\cdot, y) = 0 \tag{4.81}$$

を満たすことである．

熱方程式の形式解の存在と一意性を証明しよう．$\tau(x,y) : \mathcal{E}_y \to \mathcal{E}_x = \mathcal{E}_{\exp_y x}$ を測地線 $x_{(s)} = \exp_y sx : [0,1] \to M$ に沿った平行移動とする．

【定理 4.19】（形式解の存在）　x を y のまわりの正規座標とする．熱方程式

$$(\partial_t + H_x)k_t(x,y) = 0 \tag{4.82}$$

の形式解 $k_t(x,y)$ で

$$k_t(x,y) = q_t(x,y)\sum_{i=0}^{\infty} t^i \Phi_i(x,y,H)\left|v_{My}\right|^{1/2}$$
$$\Phi_0(0,y,H) = I_{\mathcal{E}_y} \tag{4.83}$$

の形をもつものが一意に存在する．Φ_i はつぎの式で決められる．

$$\tau(x,y)^{-1}\Phi_i(x,y) = -\int_0^1 s^{i-1}\tau(sx,y)^{-1}(B_x \cdot \Phi_{i-1})(sx,y)ds \tag{4.84}$$

とくに $\Phi_0(x,y)=\tau(x,y)$ である．ただし B_x は x 変数についての B を表す．

証明 方程式

$$(\partial_t + t^{-1}\nabla_{\mathfrak{R}} + B_x)\sum_{i=0}^{\infty} t^i\Phi_i(x,y,H)=0 \tag{4.85}$$

の左辺において，各 t^i の係数を 0 とおいて方程式系

$$\nabla_{\mathfrak{R}}\Phi_0 = 0 \tag{4.86}$$

$$(\nabla_{\mathfrak{R}}+i)\Phi_i = -B_x\Phi_{i-1} \quad i>0 \tag{4.87}$$

を得る．さらに $\Phi_0(0,y,H)=I_{E_y}$ であり，$\Phi_i(x,y,H)$ は $x=0$ で連続でなければならない．

測地線 $x_{(s)}=\exp_y sx:[0,1]\to M$ に沿う平行移動 $\tau(x,y):\mathcal{E}_y\to\mathcal{E}_x$ は，境界条件 $\tau(0,y)=1$ を満たす微分方程式 $\nabla_{\mathfrak{R}}\tau=0$ の解であるから，$\Phi_0(x,y,H)=\tau(x,y)$ である．

Φ_i を Φ_{i-1} で表す式を求めるために，関数

$$\phi_i(s)=s^i\Phi_i(sx,y,H) \tag{4.88}$$

を考えよう．$\phi_i(0)=0$ であり，$\nabla_{d/ds}\phi_i=-s^{i-1}(B_x\Phi_{i-1})(sx,y)$ であるから Φ_i に対する表記の式を得る． ■

■ **例 4.1** ■ 上に与えられた $\Phi_i(x,y)$ に対する帰納的な公式を用いて，$k_t(x,y)$ の対角集合上での漸近展開の第 2 項 $\Phi_1(0,y)$ が計算できる．原点で $\mathfrak{R}$ は 0 だから

$$\Phi_1(0,y)=-(B\cdot\Phi_0)(0,y) \tag{4.89}$$

である．さらに $\Phi_0(x,y)=\tau(x,y)$ であり

$$\Phi_1(0,y)=-\left(j^{-1/2}(\Delta^{\mathcal{E}}+F)j^{1/2}\right)(0,y) \tag{4.90}$$

となる．命題 2.32 から，この関数は M のスカラー曲率を $r_M(y)$ として

$$\Phi_1(0,y)=\frac{1}{3}r_M(y)-F(y) \tag{4.91}$$

と書けることがわかる．

測地座標系 $\exp_y x$ で

$$U_i(x,y,H) = \tau(x,y)^{-1}\Phi_i(x,y,H) \tag{4.92}$$

によって定義される $\mathcal{E}_y$ 値関数を考える．L を

$$(L\phi)(x) = \tau(x,y)^{-1}B_x(\tau(x,y)\phi(x)) \tag{4.93}$$

によって定義される y のまわりの M 上の $\mathcal{E}_y$ 値関数の空間にはたらく微分作用素とする．

$$U_i(x,y,H) = -\int_0^1 s^{i-1}(LU_{i-1})(sx,y)ds \tag{4.94}$$

がわかる．

作用素 L の係数の y でのテイラー展開係数は，リーマン曲率，バンドル $\mathcal{E}$ の曲率，およびポテンシャル F の y における共変微分係数の多項式である．ゆえに命題 2.19 と 2.32 から関数 $x \to U_i(x,y,H)$ のテイラー展開

$$\sum_\alpha U_{i,\alpha}(y,H)x^\alpha \tag{4.95}$$

の係数 $U_{i,\alpha}(y,H)$ もリーマン曲率，バンドル $\mathcal{E}$ の曲率，およびポテンシャル F の y における共変微分係数の多項式である．

4.3.5　近似解の構成

熱方程式の形式解からカット関数を使うことにより近似解がつぎのようにして得られる．

【定義 4.20】　C^∞関数 $\psi: \mathbf{R}_+ \to [0,1]$ で

$$\begin{aligned} &\psi(s) = 1 \qquad s < \varepsilon^2/4 \\ &\psi(s) = 0 \qquad s > \varepsilon^2 \end{aligned} \tag{4.96}$$

を満たすものを**カット関数**（cut function）とよぶ．

$\varepsilon > 0$ を Mの単射半径より小さい定数とする．x を y のまわりの正規座標系とし，正整数 $N > 0$ に対し前節の形式べき級数解を N で打ち切って

$$k_t^N(x,y) = \psi(d(x,y)^2)q_t(x,y)\sum_{i=0}^{N} t^i \Phi_i(x,y,H)\left|v_{My}\right|^{1/2} \tag{4.97}$$

とおく．これを近似解とよぶのであるが，その理由は $k_t^N(x,y)$ がつぎのような性質をもつからである．

【定理 4.21】（近似解（approximating solution）の存在） l を正の偶数とする．

(1) 任意の $T>0$ に対し，(4.97) の $k_t^N(x,y)$, $0 \le t \le T$ は一様に有界な $\Gamma^l(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ の作用素の族 K_t^N を定義し，

$$\lim_{t\to 0}\left\|K_t^N s - s\right\|_l = 0 \tag{4.98}$$

を満たす．

(2) 次数 $2k$ 以下の微分作用素 D_k で，D_0 は恒等作用素であり，また任意の $s\in\Gamma^{l+1}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ に対し，

$$\left\|K_t^N s - \sum_{k=0}^{l/2-j} t^k D_k s\right\|_{2j} = O(t^{(l+1)/2-j}) \tag{4.99}$$

を満たすものがある．

(3) 核 $r_t^N(x,y) = (\partial_t + H_x)k_t^N(x,y)$ は

$$\left\|\partial_t^k r_t^N\right\|_l < Ct^{(N-n/2)-k-l/2} \tag{4.100}$$

を l, k によるある正定数 C に対し満たす．

証明 (1) を証明するために，$M\times M$ の対角線集合の近傍の点を $(x,\exp_x y)$, $y\in T_xM$ と書く．x と $\exp_x y$ を結ぶ測地線に沿う平行移動によって，$\mathcal{E}_y = \mathcal{E}_{\exp_x y}$ を $\mathcal{E}_x$ と同一視する．

$\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ の切断 s を，x の近傍で測地座標系 $\exp_x y$ を用いて $s=s(y)\left|dy\right|^{1/2}$ と書けば，$s(y)$ は y の $\mathcal{E}_x$ 値関数である．すると K_t^N は前節での構成からこの座標系で

$$(K_t^N s)(x) = (4\pi t)^{-n/2} \int_{T_x M} e^{-\|y\|^2/4t} \sum_{i=0}^{N} t^i \Psi_i(x,y) s(y)\, |dy| \otimes |v_{Mx}|^{1/2} \quad (4.101)$$

のかたちに表される．ただしここで

$$(x,y) \longrightarrow \Psi_i(x,y) \in End(\mathcal{E}_x) \quad (4.102)$$

はコンパクト台をもつ微分可能な写像で $\Psi_0(x,0) = I_{\mathcal{E}_x}$ を満たすものである．

定理の内容は局所的なものなので，ベクトル空間 $\mathcal{E}_x, T_xM$ は固定されたベクトル空間 E, V としてよい．V の変数を $y = tv$ と変換すれば，$(K_t^N s)(x)$ は

$$(K_t^N s)(x) = (4\pi)^{-n/2} \int_V e^{-\|v\|^2/4} \sum_{i=0}^{N} t^i \Psi_i(x, t^{1/2}v) s(x, t^{1/2}v) dv \otimes |v_{Mx}|^{1/2} \quad (4.103)$$

と書くことができる．(1) はこの式からわかる．

テイラーの定理から次数 $2k$ 以下の微分作用素 D_k で

$$\left\| K_t^N s - \sum_{k=0}^{l/2} t^k D_k s \right\|_0 = O(t^{l/2+1}) \quad (4.104)$$

を満たすものがある．同様の議論で

$$K_t^N s - \sum_{k=0}^{l/2-j} t^k D_k s \quad (4.105)$$

の C^{2j} ノルムが評価でき，(2) が得られる．

つぎに前節と同様に y のまわりの測地座標系 $\exp_y x$ を用いることにする．命題 4.17 から

$$r_t^N(x,y) = \left[(\partial_t + t^{-1}\nabla_{\Re} + B_x) \cdot \left(\psi(d(x,y)^2) \sum_{i=0}^{N} t^i \Phi_i(x,y,H)\right) \right] q_t(x,y) \quad (4.106)$$

となる．この式の右辺は $\psi(d(x,y)^2)$ の微分を少なくとも 1 つ含む項と，t 微分と関数 Φ_i の微分しか含まない項の和である．

最初の種類の項は $d(x,y) < \varepsilon/2$ で消え，$d(x,y) > \varepsilon/2$ ではすべての k に対し

$$\partial_x^\alpha \psi(d(x,y)^2)e^{-d(x,y)^2/4t} = O(t^k) \tag{4.107}$$

が成り立つので評価は容易である．関数 Φ_i を定義する微分方程式系から，$\psi(d(x,y)^2)$ の微分を含まない項たちの和は

$$t^N q_t(x,y)(B_x\Phi_N)(x,y) \tag{4.108}$$

だけを残して消え，この項は $t^{N-n/2}$ でおさえられる．

$$\begin{aligned} \partial_t e^{-x^2/t} &= t^{-1/2}(x^2/t)e^{-x^2/t} = O(t^{-1}) \\ \partial_x e^{-x^2/t} &= t^{-1/2}(-2x/t^{1/2})e^{-x^2/t} = O(t^{-1/2}) \end{aligned} \tag{4.109}$$

を考慮して $r_t(x,y)$ の微分に対する評価を得る．■

4.3.6　真の解の構成

近似解 k_t^N を用いて熱方程式の真の解を構成する．以下 $k_t = k_t^N$ と省略して書くことにする．$\Delta_k = \{(t_1,\cdots,t_k)\,|\,0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le 1\}$ をユークリッド k 単体とし，$t>0$ に対し $t\Delta_k$ をスケール変換した k 単体

$$t\Delta_k = \{(t_1,\cdots,t_k)\,|\,0 \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le t\} \tag{4.110}$$

とする．

$$Q_t^k = \int_{t\Delta_k} K_{t-t_k}R_{t_k-t_{k-1}}\cdots R_{t_1} \tag{4.111}$$

を核

$$q_t^k(x,y) = \int_{t\Delta_k}\int_{M^k} k_{t-t_k}(x,z_k)r_{t_k-t_{k-1}}(z_k,z_{k-1})\cdots r_{t_1}(z_1,y) \tag{4.112}$$

で定義される作用素とする．十分大きな N に対しこの積分は収束し，核 q_t^k は N に依存するあるオーダーまで微分可能であることを証明する．

核

$$r_t^{k+1}(x,y) = \int_{t\Delta_k}\int_{M^k} r_{t-t_k}(x,z_k)r_{t_k-t_{k-1}}(z_k,z_{k-1})\cdots r_{t_1}(z_1,y) \tag{4.113}$$

を考える．

【補題 4.22】 N が $N>(n+l)/2$ を満たせば，r_t^{k+1}は x と y について C^l 級であり，

$$\left\|r_t^{k+1}\right\|_l \leq C^{k+1} t^{(k+1)(N-n/2)-l/2} vol(M)^k t^k/k! \tag{4.114}$$

が成り立つ．

証明 $N>(n+l)/2$ ならば切断 $(x,y)\to r_t(x,y)$ とそのオーダー l までの微分は $t=0$ まで連続に拡張し，r_t^{k+1}を定義する積分は収束する．因子 $t^k/k!$ は $t\Delta_k$の体積に等しいので，$t\Delta_k$での積分の一様評価により結果を得る．■

つぎに $q_t^k(x,y)$ とその微分の評価を考えよう．

【補題 4.23】 $N>(n+l)/2,\ l\geq 1$ とする．

(1) 核 $q_t^k(x,y)$ は x,y に関して C^l 級であり，定数 $\tilde{C}$ が存在して

$$\left\|q_t^k\right\|_l < \tilde{C} C^k vol(M)^{k-1} t^{k(N-n/2)-l/2} t^k/(k-1)! \tag{4.115}$$

がすべての $k\geq 1$ に対して成り立つ．

(2) 核 $q_t^k(x,y)$ は t に関して C^1級で

$$(\partial_t + H_x) q_t^k(x,y) = r_t^{k+1}(x,y) + r_t^k(x,y) \tag{4.116}$$

が成り立つ．

証明 q_t^kをつぎのかたちに書く．

$$q_t^k(x,y) = \int_0^t \left(\int_{z\in M} k_{t-s}(x,z) r_s^k(z,y) \right) ds \tag{4.117}$$

核 k_tとの合成は $\Gamma^l(\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ の一様に有界な作用素の族を定義するので，切断

$$b(t,s,x,y) = \int_{z\in M} k_{t-s}(x,z) r_s^k(z,y) \tag{4.118}$$

は $s\in[0,t]$ について連続であり，その x と y についてのオーダー l までの微分も連続である．さらに $b(t,t,x,y)=r_t^k(x,y)$ であり，また

$$(\partial_t + H_x)b(t,s,x,y) = \int_{z\in M} r_{t-s}(x,z)r_s^k(z,y) = r^{k+1}(x,y) \tag{4.119}$$

である．これから $b(t,s,x,y)$ は t に関して微分可能，$\partial_t b(t,s,x,y)$ は $s \in [0,t]$ の連続関数であることがわかる．(2) の証明は $q_t^k(x,y) = \int_0^t b(t,s,x,y)ds$ を t に関して微分して得られる．

(1) を証明するには，K_t の一様有界性を用いる．すなわち，$0 \le s \le t$ に対し

$$\|b(t,s)\|_l \le C \left\|r_s^k\right\|_l \tag{4.120}$$

であり，補題 4.22 とあわせて，

$$\|b(t,s)\|_l \le CC^k t^{k(N-n/2)-l/2} vol(M)^{k-1} t^{k-1}/(k-1)! \tag{4.121}$$

が得られ (1) が従う．■

以上の準備のもとで，つぎの定理により熱方程式の真の解の構成を与える．

【定理 4.24】　（真の解の存在）

(1)　$N > (n+l+1)/2$ であるようなすべての l に対し，級数

$$p_t(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k q_t^k(x,y) \tag{4.122}$$

は $M \times M$ の $\|\ \|_{l+1}$ ノルムで収束し，$\mathbf{R}_+$ から $\Gamma^l(M\times M, (\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})\hat{\otimes}(\mathcal{E}^*\otimes|\Omega|^{1/2}))$ への C^1 写像を定義し，熱方程式

$$(\partial_t + H_x)p_t(x,y) = 0 \tag{4.123}$$

を満たす．

(2)　(4.97) の核 k_t^N は p_t をつぎの意味で近似する．$t \to 0$ のとき

$$\left\|\partial_t^k(p_t - k_t^N)\right\|_l = O(t^{(N-n/2)-k-l/2+1}) \tag{4.124}$$

(3)　核 p_t は作用素 H の熱核である．

証明　$\left\|q_t^k(x,y)\right\|_{l+1}$ の評価により，$p_t(x,y)$ を定義する級数のバナッハ空間 Γ^{l+1}

での t に関して一様な絶対収束の証明が得られる．関係式

$$\partial_t q_t^k = r_t^{k+1} + r_t^k - H_x q_t^k \tag{4.125}$$

から，t に関する微分の C^l ノルムでの有界性が得られる．このことから級数 $\sum (-1)^k \partial_t q_t^k$ の Γ^l での t に関して一様な収束の証明が得られる．

微積分の基礎定理から接合積 $\int_0^t a(t-s)b(s)ds$ の t に関する微分は

$$\int_0^t \frac{da}{dt}(t-s)b(s)ds + a(0)b(t) \tag{4.126}$$

に等しい．これを適用して

$$(\partial_t + H_x)q_t^k = r_t^{k+1} + r_t^k \tag{4.127}$$

が得られる．これから $(\partial_t + H_x)p_t(x,y) = 0$ が従う．

(3) を示すためには，p_t が熱方程式の初期条件を満たすことを示さなければならないが，これは k_t^N がこの初期条件を満たすことからわかる．■

4.3.7　熱核の漸近展開

定理 4.19, 4.21 および 4.24 によって熱核が構成されたわけだが，これらの定理をあわせて局所指数定理の証明に本質的なつぎの定理が得られる．

【定理 4.25】　（**熱核の漸近展開**（asymptotic expansion of heat kernel））

$p_t(x,y,H)$ を一般化ラプラシアン $H = \Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} + F$ の熱核とする．ψ を定義 4.20 のカット関数とする．各整数 $i \geq 0$ に対しなめらかな切断 $\Phi_i \in \Gamma(M \times M, \mathcal{E}\hat{\otimes}\mathcal{E}^*)$ があって，各 $N > n = \dim(M)/2$ に対し，

$$(4\pi t)^{-n/2} e^{-d(x,y)^2/4t} \psi\left(d(x,y)^2\right) \sum_{i=0}^{N} t^i \Phi_i(x,y,H) j(x,y)^{-1/2} |v_{Mx}|^{1/2} \otimes |v_{My}|^{1/2} \tag{4.128}$$

で定義される核 $k_t^N(x,y,H)$ は $p_t(x,y,H)$ を漸近する．

$$\|\partial_t^k \left(p_t(x,y,H) - k_t^N(x,y,H)\right)\|_l = O(t^{N-n/2-l/2-k}) \tag{4.129}$$

初項 $\Phi_0(x,y,H)$ は，x と y を結ぶ測地線に沿う H を定義する接続による平行移動 $\tau(x,y):\mathcal{E}_y \to \mathcal{E}_x$に等しい．

また定理 4.21 から，$s \in \Gamma(M, \mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ に対し，

$$(P_t s)(x) = \int_{y\in M} p_t(x,y,H)s(y) \tag{4.130}$$

は t に関し $\sum t^k D_k s$ のかたちの $\Gamma(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ の中での漸近展開をもつ．熱方程式 $(\partial/\partial t + H)P_t s = 0$ から $D_k = (-H)^k/k!$ であり，

$$\left\| P_t s - \sum_{i=0}^{k} \frac{(-tH)^i}{i!} s \right\|_j = O(t^{k+1}) \tag{4.131}$$

が成り立つ．この漸近展開が作用素 P_tを e^{-tH}と書く理由づけを与える．

4.4　熱核のトレース

前節で構成された一般化ラプラシアンの熱核を積分核とする作用素は，ヒルベルト空間の作用素としてトレースクラス作用素とよばれるきわめて性質の良いものであることがわかる．

4.4.1　ヒルベルト・シュミット作用素

Hを正規直交基底 $\{e_i\}$ をもつヒルベルト空間とする．

【定義 4.26】 作用素 A が**ヒルベルト・シュミット作用素** (Hilbert-Schmidt operator) であるとは

$$\|A\|_{HS}^2 = \sum_i \|Ae_i\|^2 = \sum_{ij} \left|(Ae_i, e_j)^2\right| \tag{4.132}$$

が有限であることと定義する．$\|A\|_{HS}$を A の**ヒルベルト・シュミットノルム**

（Hilbert-Schmidt norm）という．

Aがヒルベルト・シュミット作用素ならば，その共役作用素A^*もまたヒルベルト・シュミット作用素であり，$\|A\|_{HS} = \|A^*\|_{HS}$が成り立つ．

UがHの有界作用素でAがヒルベルト・シュミット作用素ならば，UAとAUはヒルベルト・シュミット作用素であり，$\|UA\|_{HS} \leq \|U\| \, \|A\|_{HS}$が成り立つ．

AとBがヒルベルト・シュミット作用素ならば，Hの任意の正規直交基底$\{e_i\}$に対し，

$$\sum_i |(ABe_i, e_i)| \leq \|A\|_{HS} \, \|B\|_{HS} \tag{4.133}$$

が成り立つ．

Mがコンパクトリーマン多様体，$\mathcal{E}$がM上のエルミートベクトルバンドルであるとき，$\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$を$\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2}$の2乗可積分切断のなすヒルベルト空間とする．

【補題 4.27】　$\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$の位相ベクトル空間としての性質は$\mathcal{E}$のエルミート計量，$M$のリーマン計量によらない．$\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E})$についても同様である．

証明　$h_1(\ ,\ ), h_2(\ ,\ )$を$\mathcal{E}$の2つのエルミート計量とすると，可逆な切断$A \in \Gamma(M, End(\mathcal{E}))$で，すべての$s \in \Gamma(M, \mathcal{E})$に対し，$h_1(s,s) = h_2(As, As)$を満たすものがある．$A, A^{-1}$は$\Gamma_{L^2}(M, E \otimes |\Omega|^{1/2})$の有界作用素を定義し，補題の最初の部分が証明される．

g_1, g_2をMの2つのリーマン計量とし，ω_1, ω_2を対応するリーマン体積要素とすれば，正値関数$\phi \in C^\infty(M)$で$\omega_1 = \phi\omega_2$となるものがある．$\phi^{1/2}, \phi^{-1/2}$による積は$\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$の有界作用素を定義し，補題のあとの部分が証明される．

■

2乗可積分核関数

$$k(x,y) \in \Gamma_{L^2}(M \times M, (\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2}) \hat{\otimes} (\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})) \tag{4.134}$$

をもつ作用素Kはヒルベルト・シュミットであり，ヒルベルト・シュミットノルムの定義

$$\|K\|_{HS}^2 = \sum_{ij} |\langle Ke_i, e_j\rangle|^2 \tag{4.135}$$

から明らかなように

$$\|K\|_{HS}^2 = \int_{(x,y)\in M\times M} Tr(k(x,y)^* k(x,y)) \tag{4.136}$$

である．

とくに，一般化されたラプラシアン H の熱核 p_t は，すべての $t>0$ に対し，ヒルベルト・シュミット作用素の核となる．

4.4.2 作用素のトレース

【定義 4.28】 作用素 K が**トレースクラス**（trace class）であるとは，K が2つのヒルベルト・シュミット作用素 A, B の積 AB のかたちの作用素であることと定義する．このような作用素に対して，和 $\sum_i (Ke_i, e_i)$ は絶対収束し，ヒルベルト空間の正規直交基底のとり方によらない．これを K の**トレース**（trace）とよび，

$$Tr(K) = \sum_i (Ke_i, e_i) \tag{4.137}$$

で表す．

A と B がヒルベルト・シュミット作用素ならば，

$$Tr(AB^*) = (A, B)_{HS} \tag{4.138}$$

であり

$$Tr(AB) = Tr(BA) = \sum_{ij} \langle Ae_i, e_j\rangle \langle Be_j, e_i\rangle \tag{4.139}$$

が成り立つ．

$M\times M$ 上のバンドル $(\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})\hat{\otimes}(\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ の対角集合への制限は $End(\mathcal{E})\otimes|\Omega|$ に同型である．そこで，

$$a(x,y) \in \Gamma(M\times M, (\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})\hat{\otimes}(\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})) \tag{4.140}$$

を $M \times M$上のなめらかな核とするとき，バンドル $\mathcal{E}$ に作用する $a(x,x) \in \Gamma(M, End(\mathcal{E}) \otimes |\Omega|)$ の，各点ごとのトレースをとって得られる $|\Omega|$ の切断を $Tr(a(x,x))$ で表す.

【命題 4.29】 コンパクト多様体 M 上の一般化されたラプラシアンの熱核 p_t を核にもつ作用素 P_t は，すべての $t>0$ に対しトレースクラスであり，そのトレースは

$$Tr(P_t) = \int_{x \in M} Tr(p_t(x,x)) \tag{4.141}$$

で与えられる.

証明 $P_t = (P_{t/2})^2$ であり，$P_{t/2}$ はヒルベルト・シュミットであるから，P_t はトレースクラスである．そのトレースは

$$\begin{aligned} Tr(P_t) &= (P_{t/2}, P^*_{t/2})_{HS} \\ &= \int_{(x,y)\in M^2} p_{t/2}(x,y)p_{t/2}(y,x) \\ &= \int_{x\in M} p_t(x,x) \end{aligned} \tag{4.142}$$

で与えられる. ■

4.4.3 自己共役拡張

$H = \Delta^{\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}} + F$ を $\mathcal{E}$ 上の一般化されたラプラシアンとする．H を $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ の C^∞ 切断の空間を定義域とする $\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ の**非有界作用素**（unbounded operator）と考えたとき，その形式的共役作用素 H^*は同じ定義域をもつと考えられる.

【命題 4.30】 H^*の閉包は $\Gamma(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$ を定義域にもつ作用素 H の**共役作用素**（adjoint operator）に等しい．とくに H が対称ならば，H は**本質的自己共役**（essentially self-adjoint）である．すなわち $\bar{H}$ は H の**自己共役拡張**（self-adjoint extension）であり一意的である.

証明　$\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ の**超関数切断**（distributional cross section）の空間への形式的共役 H^*の作用を考える．H の共役の定義域は，H^*s を**超関数**（distribution）の意味で定義すれば，

$$D=\left\{s\in\Gamma_{L^2}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})\;\middle|\;H^*s\in\Gamma_{L^2}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})\right\} \tag{4.143}$$

である．

ゆえに $s\in D$ に対し，$\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$の C^∞切断の列 s_nで，s_nは s に，H^*s_nは H^*s に L^2–収束するものがあることを示せばよい．これを示すために，核 $p_t(x,y,H)$ をもつ作用素 P_tを用いる．■

まずつぎの 2 つの補題を用意する．

【**補題 4.31**】　$s\in\Gamma_{L^2}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ ならば，L^2 ノルムで $\lim_{t\to 0}P_ts=s$ である．

証明　ϕ が $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$の連続な切断であれば，$P_t\phi$ は一様収束ノルムで ϕ に収束し，したがって L^2 ノルムで収束する．$s=(s-\phi)+\phi$ と書いて，

$$\|P_ts-s\|_{L^2}\le\|P_t(s-\phi)\|_{L^2}+\|P_t\phi-\phi\|_{L^2}+\|s-\phi\|_{L^2} \tag{4.144}$$

となる．ゆえに作用素 P_t が，小さい t に対し $\Gamma_{L^2}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ で一様に有界であることをいえば十分である．

定理 4.25 から，

$$q_t(x,y)=(4\pi t)^{-n/2}e^{-d(x,y)^2/4t}\psi(d(x,y)^2)\,|dx|^{1/2}\otimes|dy|^{1/2} \tag{4.145}$$

として，核 $q_t(x,y)\,|dx|^{1/2}\otimes|dy|^{1/2}$ によって定義される作用素 Q_t に対し補題を証明すればよい．定数 C があって，$t>0$ に対し $\int_M|q_t(x,y)|\le C$ が成り立つ．シュワルツの不等式により $f\in\Gamma(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ ならば，

$$\int\left|\int q_t(x,y)f(y)dy\right|^2dx\le\int\left(\int q_t(x,y)dy\right)\left(\int q_t(x,y)\,|f(y)|^2\,dy\right)dx$$

$$\leq C \iint q_t(x,y)\,|f(y)|^2\,dxdy$$
$$\leq C^2\,\|f\|^2 \tag{4.146}$$

となり補題が証明される. ■

【補題 4.32】 $s \in D$ で P_t^* が核 $p_t(x,y,H^*) = p_t(y,x,H)^*$ をもつ作用素ならば, $H^* P_t^* s = P_t^* H^* s$ である.

証明　$s \in \Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$ ならば $HP_t s = P_t H s$ が成り立つ. なぜならば両辺は熱方程式を満たし, $P_t s - s$ はその微分とともに $t \to 0$ のとき一様に 0 に収束する. 共役をとって, $\Gamma^{-\infty}(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$ において (ゆえにとくに D において) $H^* P_t^* = P_t^* H^*$ が成り立つことがわかり, 補題が証明された.

（命題の証明のつづき）与えられた s に対し, $s_n = P_{1/n}^* s$ とおく. $n \to \infty$ のとき, 上の補題 4.31 から, Γ_{L^2}で $s_n \to s$ がわかり, 2 番目の補題 4.32 から $H^* s_n = P_{1/n}^* H^* s$ がわかる. ふたたび補題 4.31 によって $H^* s_n$が $H^* s$ に収束することがわかる.

H^*を H に置き換えたこの結果から, $\Gamma(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$ を定義域にもつ H の閉包は H^* の共役であることがわかる. とくに H が対称, $H = H^*$, ならば $\bar{H}$ は自己共役であり, 命題が証明される. ■

4.4.4　固有値と固有関数

以下 H が対称であるときのみを考える.

トレースクラス自己共役作用素 P_t を同時対角化すれば, 固有切断 ϕ_i からなるヒルベルト基底がとれ, P_t の**半群**（semi-group）の性質により $\lambda_i \in \mathbf{R}$ があって

$$P_t \phi_i = e^{-t\lambda_i} \phi_i \tag{4.147}$$

となる. $P_t \phi_i$ は $\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2}$の C^∞切断だから ϕ_i は C^∞である. 作用素 P_t は有界であるから λ_i は下に有界である. $P_t \phi_i$ が熱方程式を満たすことから

$$H \phi_i = \lambda_i \phi_i \tag{4.148}$$

が得られる．さらに P_t はトレースクラスであるから，$\sum_i e^{-t\lambda_i}$ は各 $t>0$ に対し有限である．ゆえに $\bar{H}$ のスペクトルは有限重複度をもって離散的である．以上をまとめてつぎの命題を得る．

【命題 4.33】 H が対称な一般化されたラプラシアンならば，作用素 P_t は $e^{-t\bar{H}}$ に等しい．作用素 $\bar{H}$ は下に有界な離散スペクトルをもち，各固有空間は有限次元で $\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2}$ の C^∞ 切断によって与えられる固有ベクトルをもつ．

誤解のおそれのないかぎり，$P_t=e^{-t\bar{H}}$ を e^{-tH} と書く．Hのスペクトル分解から，

$$p_t(x,y)=\sum_j e^{-t\lambda_j}\phi_j(x)\otimes\phi_j(y) \tag{4.149}$$

が得られる．以後 $p_t(x,y)$ を $e^{-tH}(x,y)$ と書くこともある．

【命題 4.34】 H を一般化されたラプラシアンとし，$P_{(0,\infty)}$を正の**固有値**（eigen value）に属する H の**固有関数**（eigen function）の上への射影とする．λ_1を H の最小の 0 でない固有値とすれば，各 $l\in N$ に対し定数 $C(l)>0$ があって，十分大きい t に対し，

$$\left\|(P_{(0,\infty)}e^{-tH}P_{(0,\infty)})(x,y)\right\|_l\le C(l)e^{-t\lambda_1/2} \tag{4.150}$$

が成り立つ．

証明　大きい t に対し，

$$\begin{aligned}&(P_{(0,\infty)}e^{-tH}P_{(0,\infty)})(x,y)\\ &\quad=\int_{(z_1,z_2)\in M^2}k_{1/2}(x,z_1)(P_{(0,\infty)}e^{-tH}P_{(0,\infty)})(z_1,z_2)k_{1/2}(z_2,y)\end{aligned} \tag{4.151}$$

と書くことができる．核 $k_{1/2}(x,y)$ はなめらかであり，したがって

$$\int_{(x,y)\in M^2}\left|(P_{(0,\infty)}e^{-(t-1)H}P_{(0,\infty)})(x,y)\right|^2\le Ce^{-t\lambda_1} \tag{4.152}$$

をいえばよい．この左辺は $P_{(0,\infty)}e^{-(t-1)H}P_{(0,\infty)}$のヒルベルト・シュミットノルム

にほかならない．

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \tag{4.153}$$

を H の正の固有値をその**重複度**（multiplicity）をこめて並べたものとして

$$\sum_{j\geq 1} e^{-2(t-1)\lambda_j} \leq Ce^{-t\lambda_1} \tag{4.154}$$

を示さなければならない．大きい t に対し，

$$\begin{aligned}
\sum_{j\geq 1} e^{-2(t-1)\lambda_j} &\leq \left(\sum_{j\geq 1} e^{-2(t-2)\lambda_j}\right)\cdot \sup_{j\geq 1}\ e^{-t\lambda_j} \\
&\leq \left(\sum_{j\geq 1} e^{-2(t-2)\lambda_j}\right)\cdot\ e^{-t\lambda_1} \\
&\leq \left(\sum_{j\geq 1} e^{-\lambda_j}\right)\cdot\ e^{-t\lambda_1} \\
&= \left(\int_{x\in M} (P_{(0,\infty)}e^{-H}P_{(0,\infty)})(x,x)\right)\cdot\ e^{-t\lambda_1}
\end{aligned} \tag{4.155}$$

となることから (4.154) が従う．■

とくに H が正，つまり非負で核が 0 ならば $P_{(0,\infty)}$ は 1 に等しい．このとき λ_1 を H の最小固有値とすれば，各 $l \in N$ に対し定数 $C(l) > 0$ があって十分大きい t に対し，

$$\|p_t(x,y)\|_l \leq C(l)e^{-t\lambda_1/2} \tag{4.156}$$

が成り立つ．

4.4.5　グリーン作用素

【定義 4.35】　正の一般化ラプラシアン H の $\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ での逆作用素 G を H の**グリーン作用素**（Green operator）とよぶ．

明らかに G は $\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ で有界である．つぎの定理で G の性質を述

べる．

【定理 4.36】　Hを正の一般化ラプラシアンとする．Gを$\Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$での$H$の逆作用素とする．このとき，各自然数$k$に対し積分表示式

$$G^k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-tH} t^{k-1} dt \tag{4.157}$$

が成り立つ．作用素G^kは$k > 1 + (\dim(M) + l)/2$に対し，C^l核をもつ．

証明　$k \geq 1$ならば，G^kを積分

$$G^k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty e^{-tH} t^{k-1} dt \tag{4.158}$$

で定義することができる．ϕがHの固有値λに属する固有関数ならば，G^kをϕに作用させて

$$\frac{1}{(k-1)!} \left(\int_0^\infty e^{-tH} t^{k-1} dt C^l \right) \phi = \lambda^{-k} \phi \tag{4.159}$$

を得る．ゆえにkが自然数のときG^kは$\underbrace{G \circ \cdots \circ G}_{k}$に等しい．

十分大きなkに対し積分

$$g^k(x, y) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty p_t(x, y) t^{k-1} dt \tag{4.160}$$

は収束し，作用素G^kのC^l核を定義することを示そう．積分を2つの部分に分解し

$$g^k(x, y) = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 p_t(x, y) t^{k-1} dt + \frac{1}{(k-1)!} \int_1^\infty p_t(x, y) t^{k-1} dt \tag{4.161}$$

とする．第1項の積分をつぎの補題で評価する．

【補題 4.37】　核$t^{k-1} p_t(x, y) (t \leq 1)$の族は$k \geq 1 + (l + n)/2$のとき，$C^l$ノルムで一様に有界である．

証明　熱核$p_t(x, y)$の漸近展開を用いて，核

$$q_t(x,y) = \psi(d(x,y)^2) t^{-\dim(M)/2} e^{-d(x,y)^2/4t} \tag{4.162}$$

に対して補題を証明すれば十分であることがわかる．ただし ψ は $\mathbf{R}_+$ 上のなめらかな関数で，0 の近くで 1 かつ $[\varepsilon^2, \infty)$ で 0 であるものである．

$$\left| \partial^\alpha e^{-d(x,y)^2/4t} \right| \leq C t^{-|\alpha|/2} \tag{4.163}$$

であるから，$k \geq 1 + (l+n)/2$ に対し核 $t^{k-1} \partial^\alpha q_t(x,y)$ の族は $0 \leq t \leq 1, \alpha \leq l$ で一様に連続になる．（補題の証明終わり）

命題の証明を完成させよう．(4.161) の第 2 項の積分は命題 4.34 によりなめらかな核に収束する．実際任意の C^l ノルムで

$$\frac{1}{(k-1)!} \int_1^\infty \|p_t(x,y)\|_l \, t^{k-1} dt \leq \frac{C(l)}{(k-1)!} \int_1^\infty e^{-t\lambda_1/2} t^{k-1} dt \tag{4.164}$$

であることがわかり，したがって有限である．■

この定理はただちに任意の自己共役一般化ラプラシアン H に拡張できる．H のグリーン作用素 G を $(\ker H)^\perp$ 上で H の逆，$\ker H$ で 0 と定義する．G の積分表示は正でない固有値に対する扱いを除けば上に与えたものと同様になる．

$$\lambda_{-m} \leq \cdots . \leq \lambda_{-1} < 0 \tag{4.165}$$

を H の負固有値，P_{λ_i} を H の固有値 λ_i に属する固有空間への直交射影とすれば，

$$G^k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\infty P_{(0,\infty)} e^{-tH} t^{k-1} dt + \sum_{i=1}^m (-\lambda_{-i})^{-k} P_{-\lambda_i} \tag{4.166}$$

である．作用素 $P_{-\lambda_i}$ は平滑化作用素だから G の核の評価は H が正の場合とまったく同様にできる．

上の定理から**楕円型正則性**（elliptic regularity）とよばれるつぎの重要な結論が導かれる．

【系 4.38】 H を $\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2}$ 上の対称一般化ラプラシアンとする．

(1) $s \in \Gamma_{L^2}(M, \mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2})$ とし，すべての k に対し $H^k s$ が一般化切断の意味で 2 乗可積分とする．このとき s はなめらかである．

(2)　A が $\Gamma_{L^2}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ 上の有界作用素で H と可換なものとする．このとき $s\in\Gamma(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ がなめらかならば，$As\in\Gamma(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ はなめらかである．

証明　必要ならば H に大きな正定数を足すことにより，H は正と仮定してよい．このとき，$1=G^k\circ H^k=H^k\circ G^k$である．$G^k$は Hと可換だから，$s=G^k\circ H^k s$ である．仮定により $H^k s$ は 2 乗可積分であるから，上の評価により $l\leq 2k-n-1$ に対し $G^k\circ H^k s$ は C^lに属する．$k\to\infty$ とすれば (1) が得られる．

(2) は公式

$$As=(G^k\circ H^k\circ A)s=(G^k\circ A\circ H^k)s \tag{4.167}$$

を用いて同様に示される．$s\in\Gamma(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ がなめらかならば，$H^k s$ もなめらかであり，とくに 2 乗可積分である．A はヒルベルト空間 $\Gamma_{L^2}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ で有界だから，$AH^k s\in\Gamma_{L^2}(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ である．ゆえに $As=G^k(AH^k s)$ は $l\leq 2k-\dim(M)-1$ に対し C^l である．k を大きくとって (2) が得られる．　■

とくに対称一般化ラプラシアン H に対し $Hs=0$ を満たす s はなめらかである．したがって $ker\,H$ は作用素 H を $\Gamma(M,\mathcal{E}\otimes|\Omega|^{1/2})$ のどの完備化で考えても変わらない．

4.4.6　トレースの漸近展開

定理 4.25 の $p_t(x,y)$ の漸近展開から，熱作用素 e^{-tH}のトレースは小さい $t>0$ に対し $t^{1/2}$のローラン級数への漸近展開をもつ．

$$Tr(e^{-tH})=\int_M Tr(p_t(x,x))\sim(4\pi t)^{-n/2}\sum_{i=0}^{\infty}t^i\int_M Tr(\Phi_i(x,x,H))\,|v_M| \tag{4.168}$$

とくに $\Phi_0(x,x,H)$ が I_Eに等しいことを用いてつぎのワイルの定理が得られる．

【定理 4.39】　（**ワイル (Weyl) の定理**）λ_i を $\bar{H}$ の重複度をこめた固有値の列とする．$t\to 0$ のとき $\bar{H}$ のスペクトル測度（spectral measure）のラプラス変換（Laplace transform）の漸近展開があって，

$$\sum_i e^{-t\lambda_i} = (4\pi t)^{-n/2} rk(E) vol(M) + O(t^{-n/2+1}) \tag{4.169}$$

となる.

熱核 $p_t(x,y)$ の漸近展開におけるすべての係数 $\Phi_i(x,x,H)$ を計算すれば，H のスペクトル測度のラプラス変換の漸近展開を得ることができる．このことは少なくとも原理的には可能である.

ワイルの定理から，つぎにあげる定理により Hの固有値の無限遠での漸近分布に関する情報が得られる.

【定理 4.40】 $d\mu(\lambda)$ を $\mathbf{R}_+$ 上の正測度で積分

$$\int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) \tag{4.170}$$

が $t > 0$ で収束し，ある正定数 α と C に対し,

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha \int_0^\infty e^{-t\lambda} d\mu(\lambda) = C \tag{4.171}$$

が成り立つものとする.

このとき $f(x)$ を単位区間上の連続関数とすれば

$$\lim_{t\to 0} t^\alpha \int_0^\infty f(e^{-t\lambda}) d\mu(\lambda) = \frac{C}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty f(e^{-t}) t^{\alpha-1} e^{-t} dt \tag{4.172}$$

が成り立つ.

証明　ワイエルシュトラス (Weierstrass) の定理により，関数 $f(x)$ を多項式 p によって任意の近くまで近似することができる.

$$|f(x) - p(x)| \le \varepsilon, \quad x \in [0,1] \tag{4.173}$$

ゆえに定理の極限公式は単項式 $f(x) = x^k$ に対して証明すれば十分である．このとき,

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha}\int_0^{\infty} e^{-(k+1)t\lambda}d\mu(\lambda) = C(k+1)^{-\alpha} \tag{4.174}$$

であり，他方

$$\frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} e^{-kt}t^{\alpha-1}e^{-t}dt = C(k+1)^{-\alpha} \tag{4.175}$$

である． ■

上の定理を用いてワイルの定理を言い換えることができる．

【系 4.41】 $N(\lambda)$ を H の固有値で λ より小さいものの個数とすれば，

$$N(\lambda) \sim \frac{rk(E)vol(M)}{(4\pi)^{n/2}\Gamma(n/2+1)}\lambda^{n/2} \tag{4.176}$$

証明 前定理において，区間 $[1/e, 1]$ においては x^{-1}に等しく区間 $[0, 1/e)$ では 0 に等しい関数に収束する連続関数の減少列をとれば

$$\lim_{t\to 0} t^{\alpha}\int_0^{t^{-1}} d\mu(\lambda) = \frac{C}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}dt = \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)} \tag{4.177}$$

である．$H+\alpha$ が正であるような定数 α を考え，上の結果を $H+\alpha$ のスペクトル測度 $\mu = \sum_i \delta_{\lambda_i}$ $\alpha = n/2$, $C = (4\pi)^{-n/2}rk(E)vol(M)$ として適用することにより系が得られる． ■

■ **例 4.2** ■ Mを長さ $2n$ の円周とし，H をスカラーラプラシアン Δ とする．ラプラシアンの固有値は，重複度 1 の $\lambda = 0$ と，重複度 2 の $\lambda = n$ $(n \geq 1)$ である．ゆえに $N(\lambda) = [2\sqrt{\lambda}+1]$．一方，ワイルの定理から

$$N(\lambda) \sim \frac{vol(S^1)}{\sqrt{4\pi}\Gamma(3/2)}\sqrt{\lambda} \tag{4.178}$$

となり，$vol(S^1) = 2\pi$ かつ $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ から$\sqrt{\lambda}$ の係数は 2 である．

5

クリフォード代数

クリフォード代数は素粒子物理学でフェルミオン粒子の生成消滅作用素のなす代数として現れるが，幾何学的には空間の無限小回転を代数化したものとしての側面をもち，ひとたび構成されると指数写像をとることにより，空間の回転群とその 2 重被覆リー群であるスピノル群が自然に実現される．リー群を扱う場合，リー群そのものよりその無限小版であるリー代数を扱う方が，便利で計算も容易であることが多い．クリフォード代数は回転群のリー代数をそのなかに含み，全体はさらに豊富な構造をもった代数である．クリフォード代数の計算はなれないうちはいく分わずらわしく感じられるが，空間の回転群のもつ(したがって必然的に非可換である）幾何学的性質を効率のよい計算方法でとらえるのにたいへん適したものであることがわかる．

5.1 超　空　間

ディラック作用素に登場する，外積代数，クリフォード代数およびそれらに関連したベクトルバンドルは自然な $\mathbf{Z}_2$ **階数づけ**（$\mathbf{Z}_2$ grading）をもつ．この節でそれを定式化する．

$\mathbf{Z}_2$ 階数づけをもつことを “超（super)” という言葉をつけて表現するのであるが，これは素粒子物理学の**超対称性**（super symmetry）に由来するものである．単なるひとつのフォーマリズムであるがディラック作用素の指数定理についての基本的な見方を含んだものである．

【定義 5.1】 $\mathbf{Z}_2$ 階数づけられたベクトル空間

$$E = E^+ \oplus E^- \tag{5.1}$$

を**超空間**（super space）とよぶ．E^+の元を**偶**（even），E^-の元を**奇**（odd）とよぶ．

超代数（super algebra）とは積をもつ超空間で

$$A^i \cdot A^j = A^{i+j} \qquad (i, j \in \mathbf{Z}_2) \tag{5.2}$$

を満たすもののことである．ただしここで，$\mathbf{Z}_2$ の元 +, −を，0 (*mod*.2), 1 (*mod*.2) で表している．たとえば**外積代数**（exterior algebra）ΛE は

$$\Lambda^{\pm} E = \sum_{(-1)^i = \pm 1} \Lambda^i E \tag{5.3}$$

による $\mathbf{Z}_2$ 階数づけにより超代数をなす．超空間の自己準同型写像の全体 $End(E)$ は

$$\begin{aligned} End^+(E) &= Hom(E^+, E^+) \oplus Hom(E^-, E^-) \\ End^-(E) &= Hom(E^+, E^-) \oplus Hom(E^-, E^+) \end{aligned} \tag{5.4}$$

の $\mathbf{Z}_2$階数づけで超代数である．

超代数 $A = A^+ \oplus A^-$ の元 a に対し，$a \in A^+$ のとき $|a| = 0$, $a \in A^-$ のとき $|a| = 1$ とし，超代数の 2 つの元 a, b の**超交換子**（super commutator）を，$a, b \in A^{\pm}$ に対し

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba \tag{5.5}$$

で定義する．超交換子は**超リー代数**（super Lie algebra）の公理

(1) $[a, b] + (-1)^{|a||b|}[b, a] = 0$

(2) $[a, [b, c]] = [[a, b], c] + (-1)^{|a||b|}[b, [a, c]]$

を満たす．$[a, b] = 0$ のとき，a, b は**超可換**（super commutative）であるという．

【定義 5.2】 E を超空間とする．超代数 $End(E)$ 上の一次形式 Str を

$$Str(a) = \begin{cases} Tr_{E^+}(a) - Tr_{E^-}(a) & a \text{ even} \\ 0 & a \text{ odd} \end{cases} \tag{5.6}$$

で定義し，**超トレース**（super trace）とよぶ．

【命題 5.3】 超トレース Str は $Str([a,b]) = 0$ を満たす．

証明　a, b が反対の**偶奇**（parity）をもてば，$[a,b]$ は奇になるので $Str([a,b]) = 0$ である．$a = \begin{pmatrix} a^+ & 0 \\ 0 & a^- \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b^+ & 0 \\ 0 & b^- \end{pmatrix}$ をともに偶とすれば，

$$[a,b] = \begin{pmatrix} [a^+, b^+] & 0 \\ 0 & [a^-, b^-] \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

であり

$$Tr_{E^+}([a^+, b^+]) = Tr_{E^-}([a^-, b^-]) = 0 \tag{5.8}$$

から $Str([a,b]) = 0$ となる．

$a = \begin{pmatrix} 0 & a^- \\ a^+ & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 & b^- \\ b^+ & 0 \end{pmatrix}$ をともに奇とすれば，

$$[a,b] = \begin{pmatrix} a^-b^+ + b^-a^+ & 0 \\ 0 & a^+b^- + b^+a^- \end{pmatrix} \tag{5.9}$$

であり，

$$Str([a,b]) = Tr_{E^+}(a^-b^+ + b^-a^+) - Tr_{E^-}(a^+b^- + b^+a^-) = 0 \tag{5.10}$$

となる．■

$E = E^+ \oplus E^-$, $F = F^+ \oplus F^-$ を2つの超空間とすれば，テンソル積 $E \otimes F$ は

$$\begin{aligned} (E \otimes F)^+ &= E^+ \otimes F^+ \oplus E^- \otimes F^- \\ (E \otimes F)^- &= E^+ \otimes F^- \oplus E^- \otimes F^+ \end{aligned} \tag{5.11}$$

で超空間になる．

2つの超代数 A, B のテンソル積は超空間 $A \otimes B$ に積

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|}(a_1a_2 \otimes b_1b_2) \tag{5.12}$$

を入れて定義される．

【定義 5.4】 A が超可換代数（任意の $a, b \in A$ に対し $[a, b] = 0$ が成り立つ），E が超代数のとき，$End(E)$ の超トレースは写像

$$Str : A \otimes End(E) \longrightarrow A \tag{5.13}$$

に，$a \in A$ と $M \in End(E)$ に対し $Str(a \otimes M) = aStr(M)$ とおいて拡張される．

A が超可換のとき

$$[a \otimes M, b \otimes N] = (-1)^{|M|\cdot|b|}ab \otimes [M, N] \tag{5.14}$$

が成り立つので，拡張された超トレースもやはり $A \otimes End(E)$ の超交換子の上で消える．

E_1 と E_2 が超空間ならば，$End(E_1 \otimes E_2)$ は $End(E_1) \otimes End(E_2)$ と同一視できる．ただし後者の作用は $a_i \in End(E_i)$ と $e_i \in E_i$ に対し，

$$(a_1 \otimes a_2)(e_1 \otimes e_2) = (-1)^{|a_2|\cdot|e_1|}(a_1e_1) \otimes (a_2e_2) \tag{5.15}$$

と定める．

【定義 5.5】 **エルミート超空間**（Hermitian super space）とは，E^+, E^- がともに**エルミート計量**（Hermitian metric）をもつ複素ベクトル空間である超空間として定義される．

E がエルミート超空間のとき，$u \in End^-(E)$ が**奇自己共役**（odd self-adjoint）とは，$u^+ : E^+ \to E^-$ とその**共役**（adjoint）$u^- : E^- \to E^+$ により，

$$u = \begin{pmatrix} 0 & u^- \\ u^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{5.16}$$

と書かれることである．

Vを実ベクトル空間，e_i をその基底とする．e^i を双対空間 V^* の双対基底とする．$1,\cdots,\dim V$の部分集合

$$I = 1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq \dim V$$
$$J = 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq \dim V \tag{5.17}$$

に対し，$e^I = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$，$e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_k}$ とおき

$$\left\langle e^I, e_J \right\rangle = \delta^I_J \tag{5.18}$$

とおくことによって，$\Lambda^k V^*$を $(\Lambda^k V)^*$ と同一視する．

この同一視によって，$\alpha \in V^*$ に対し $\alpha\wedge \in End(\Lambda V^*)$ の双対写像が

$$(\alpha\wedge)^* = \iota(\alpha) \in End(\Lambda V) \tag{5.19}$$

で与えられ，また $v \in V$ に対し $\iota(v) \in End(\Lambda V^*)$ の双対写像が

$$\iota(v)^* = (v\wedge) \in End(\Lambda V) \tag{5.20}$$

で与えられる．

$A \in End(V)$ のとき，超代数 ΛVの微分で V上 A と一致するものが一意に存在するが，それを $\lambda(A)$ で表す．すなわち

$$\lambda(A) = \sum_{jk} \left\langle e^j, Ae_k \right\rangle (e_j\wedge)\iota(e^k) \tag{5.21}$$

である．

$A \in \Lambda^2 V$ に対し，代数 ΛVでの**指数写像**（exponential map）を $\exp_\Lambda A = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{n!} A^n$ で表す．これは有限和であることに注意しよう．

第3章オイラー類のところで与えた定義3.11の式(3.33)は，3.8節で注意したようにベレジン積分と指数写像を用いて表される．これはパフィアンとよばれるものであり，以後この用語を使うのでつぎに定義として与えておく．

【定義 5.6】 Vを向きづけられたユークリッドベクトル空間とする．$T : \Lambda V \to \mathbf{R}$ を定義3.29のベレジン積分とする．$A \in \Lambda^2 V$の**パフィアン**（Pfaffian）を

$$Pf_\Lambda(A) = T(\exp_\Lambda A) \tag{5.22}$$

で定義する.

向きづけられたユークリッドベクトル空間 V の向きを保つ**等長変換群**（isometry group）$SO(V)$ のリー環を $so(V)$ とすれば，$A \in so(V)$ のパフィアンは

$$Pf_\Lambda(A) = T\left(\exp_\Lambda \sum_{i<j} (Ae_i, e_j)\, e_i \wedge e_j\right) \tag{5.23}$$

である．ただし (,) はユークリッド内積である．$V = \mathbf{R}^2$ が正規直交基底 $\{e_1, e_2\}$ をもち，$A = \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix}$ ならば，$Pf_\Lambda(A) = \theta$ となる．

【命題 5.7】 **歪対称行列**（交代行列，skew symmetric matrix）のパフィアンは行列式の平方根である．

$$Pf(A)^2 = \det(A) \tag{5.24}$$

証明 V の向きづけられた正規直交基底 e_j と実数 c_j, $1 \le j \le n/2$, があって

$$\begin{aligned} Ae_{2j-1} &= c_j e_{2j} \\ Ae_{2j} &= -c_j e_{2j-1} \end{aligned}$$

となるものがある．したがって V が 2 次元空間 $\mathbf{R}^2$ で $Ae_1 = \theta e_2, Ae_2 = -\theta e$ のときに帰着される．この場合は $Pf(A) = \theta$, $\det(A) = \theta^2$ である． ■

5.2 クリフォード代数

ディラック作用素はベクトルバンドルの共変微分と，各点の余接空間に付随してつくられるクリフォード代数を結合して定義される．この章ではクリフォード代数の説明を行う．

5.2.1 ラプラシアンの平方根

序文でふれたようにディラック作用素とクリフォード代数の起源は，ラプラシア

ンの平方根をつくり出すことにあった.

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} D_j^2, \quad D_j = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_j} \tag{5.25}$$

を n 次元ユークリッド空間上のラプラシアンとする. 行列係数の定係数偏微分作用素

$$D^+ = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j D_j \tag{5.26}$$

に対し, ユークリッド計量に関するその**共役作用素** (adjoint operator) $D^- = (D^+)^*$ は, $\gamma_j^* = {}^t\bar{\gamma}_j$ を γ_j の**随伴行列** (adjoint matrix) として $D^- = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^* D_j$ で与えられる. そこで I を単位行列として

$$\Delta^- \cdot \Delta^+ = \Delta I \tag{5.27}$$

を満たすような D^+をつくることを考えてみよう. (5.27) は

$$\gamma_j^*\gamma_j = I, \quad \gamma_j^*\gamma_k + \gamma_k^*\gamma_j = 0\ ,\ j \neq k\ ,\ j,k = 1,\cdots,n \tag{5.28}$$

と同値である.

$n=1$ ならば $\gamma_1 = i$ でよく, $D^+ = d/dx$ である. $n=2$ のときは $\gamma_1 = i, \gamma_2 = -1$ で対応する微分作用素は

$$D^+ = \bar{\partial} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2}\right),$$
$$D^- = \partial = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - i\frac{\partial}{\partial x_2}\right) \tag{5.29}$$

であり, 複素座標 $x_1 + ix_2$についてのコーシー・リーマン作用素とその共役作用素である.

ディラックに従って $n=4$ の場合の 2×2 行列解を求める. $n=1,2$ の解の類似によりとりあえず $\gamma_1 = iI$ とおけば, 残りの条件は

$$\gamma_j^* = \gamma_j, \quad \gamma_j^2 = I, \quad \gamma_j\gamma_k + \gamma_k\gamma_j = 0, \quad j \neq k,\ j,k \geq 2 \tag{5.30}$$

となる. つまり γ_1 以外の行列は互いに**反可換** (anticommuting) なエルミート行列で, 位数 2 の**対合変換** (involution) を表すものになる. このことから解は容易

に見いだすことができ，

$$\gamma_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \tag{5.31}$$

となる．これらは**パウリ**（Pauli）**行列**とよばれる．

問　パウリ行列が $n=4$ の場合の解を与えることを確かめよ．

後に示されるように $n=2k$ に対して $2^{k-1}\times 2^{k-1}$ 行列の解があることがわかる．またある n について解が求まれば，それより小さい値に対しては単にいくつかの行列を落として解が得られる．

(5.28) を解くディラックのアイデアはつぎのようなものであった．$\gamma_1 = iI$ と γ_j $(j>1)$ が (5.28) を満たせば，$\gamma_1 = -iI$ と γ_j $(j>1)$ は (5.30) を満たす．

ゆえに作用素 D を

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{5.32}$$

とおけば，D は

$$D^2 = \Delta I, \quad D^* = D \tag{5.33}$$

を満たす．この意味で D はラプラシアンの平方根であり，さらに自己共役である．(5.28) を満たす D^+（および D^-）を求めることは (5.30) を満たす D を求めることと同じである．

D を $p\times p$ 行列係数の 1 階偏微分作用素で $D^2=\Delta I$ を満たすものとする．D の表象は $\xi\in\mathbf{R}^n$ に線形に依存する行列

$$\sigma(D) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \xi_j \tag{5.34}$$

である．$\sigma(D)$ は線形写像

$$\mathbf{R}^n \ni \xi \longrightarrow \sigma(D(\xi)) \in End(\mathbf{R}^p) \tag{5.35}$$

であって，(5.33) から

$$\sigma(D)(\xi)\cdot\sigma(D)(\xi) = \|\xi\|^2 I \tag{5.36}$$

を満たす．(5.36) はすべての ξ に対し成り立つので，ξ を $\xi+\eta$ に置き換えて展開

すれば

$$\sigma(D)(\xi)\cdot\sigma(D)(\eta)+\sigma(D)(\eta)\cdot\sigma(D)(\xi)=2(\xi,\eta)I \tag{5.37}$$

が得られる．したがって線形写像 $\sigma(D)$ の像から行列の和と積によってつくられる元の全体は，全行列環 $End(\mathbf{R}^p)$ の中の部分代数で関係式 (5.37) を満たすものになる．

そこで抽象代数的に，$\mathbf{R}^n$の元を生成元とし，関係式

$$\xi\cdot\eta+\eta\cdot\xi=(\xi,\eta),\quad \xi,\eta\in\mathbf{R}^n \tag{5.38}$$

で定義される代数を構成し，これを $C(\mathbf{R}^n)$ と書くことにする．すると上の $\sigma(D)$ は $C(\mathbf{R}^n)$ の $End(\mathbf{R}^p)$ への代数準同型写像

$$C(\mathbf{R}^n)\longrightarrow End(\mathbf{R}^p) \tag{5.39}$$

を与えていると見なせる．このような代数準同型写像を $C(\mathbf{R}^n)$ の $End(\mathbf{R}^p)$ 表現とよぶ．逆に $C(\mathbf{R}^n)$ の表現があったとき，その像を係数とした微分作用素をつくればそれがラプラシアンの平方根を与えることになる．つまり (5.30) の解が見いだせるわけである．

$C(\mathbf{R}^n)$ を $\mathbf{R}^n$の標準内積に付随するクリフォード代数とよぶのであるが，結局 (5.30) の解を見いだすことは，クリフォード代数 $C(\mathbf{R}^n)$ の表現論を考えることに帰着されたことになるのである．

後に示すようにクリフォード代数はその中にスピノル群とよばれる回転群 $SO(n)$ の 2 重被覆リー群を含み，その表現論とともにたいへん豊かな構造をもつものである．

5.2.2　クリフォード代数

V を n 次元実ベクトル空間とし，Q を Vの正定値内積とする．

$$T(V)=\sum_{k=0}^{\infty}T^k(V)=\sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{k} \tag{5.40}$$

を Vの**テンソル代数**（tensor algebra）とする．I_Qを $T(V)$ のイデアルで

$$v\otimes w+w\otimes v+2Q(v,w)\qquad (v,w\in V) \tag{5.41}$$

という形の元全体から生成されるものとする．

【定義 5.8】 $T(V)$ の I_Q による商として得られる代数

$$C(V,Q) = T(V)/I_Q \tag{5.42}$$

を (V,Q) の**クリフォード代数**（Clifford algebra）とよぶ．$v_1 \otimes \cdots \otimes v_k (v_1, \cdots, v_k \in V)$ で表される $C(V,Q)$ の元を $v_1 \cdots v_k$ と書く．

$C(V,Q)$ は実数体上 V で生成された代数で関係式

$$vw + wv = -2Q(v,w) \tag{5.43}$$

を満たすものであるが，つぎの命題は $C(V,Q)$ がそのようなもののうち，もっとも普遍的なものであることをいっている．証明は明らかであろう．

【命題 5.9】 A が代数で，$c : V \to A$ がすべての $v, w \in V$ に対し

$$c(w)c(v) + c(v)c(w) = -2Q(v,w) \tag{5.44}$$

を満たす線形写像とするとき，$C(V,Q)$ から A への代数の写像で c の拡張になっているものが一意的に存在する．

テンソル代数 $T(V)$ は $\underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{k}$ の元を次数 k として非負整数で階数づけられた代数であるが，これを $mod.2$ で考えたものは $C(V,Q)$ でも意味をもち，$C(V,Q)$ は $\mathbf{Z}_2$ 階数づけられた超代数となる．

$$C(V) = C^+(V) \oplus C^-(V) \tag{5.45}$$

ただし $C^+(V)$，$C^-(V)$ はそれぞれ偶数個，奇数個の V の元の積で表されるもののなす部分加群である．$C^+(V)$ は部分代数でもある．

【定義 5.10】 $\boldsymbol{C(V)}$ **加群**（Clifford module）E とは超加群 $E = E^+ \oplus E^-$ であり，

$$C^+(V) \cdot E^\pm \subset E^\pm,$$
$$C^-(V) \cdot E^\pm \subset E^\mp \tag{5.46}$$

を満たすもののことである．

V の自己同型 $v \to v^* = -v \ (v \in V)$ を $(vw)^* = w^*v^*(v, w \in T(V))$ を満たすようにT(V) の**反自己同型**（anti-automorphism）に拡張すれば，I_Qはこの写像により保たれるのでこれは $C(V)$ の反自己同型 $a \to a^*$を定義する．

【定義 5.11】 内積をもつ $C(V)$ 加群 E が**自己共役**（self-adjoint）とは $c(a^*) = c(a)^*$ を満たすときをいう．これは $c(v)$ $(v \in V)$ が**歪随伴**（skew-adjoint）ということと同値である．

$C(V)$ 加群 E に対し，$v \in V$の E への作用を $c(v)$ と書く．

【定義 5.12】 E が $C(V)$ 加群のとき，$End_{C(V)}(E)$ で E の $C(V)$ 作用と超可換な自己同型写像のなす代数を表す．

■ **例 5.1** ■ $C(V)$ 加群のもっとも典型的な例は $E = \Lambda V$ (V の外積代数) としてつぎのように得られる．$\alpha \in \Lambda V$ に対し $v \in V$ の作用を

$$c(v)\alpha = v \wedge \alpha - \iota(v)\alpha \tag{5.47}$$

で定義する．ただし $\iota(v)$ はベクトル $Q(v, \ ) \in V^*$による縮約を表す．この作用は一意的に $C(V)$ の作用に拡張し，ΛV は $C(V)$ 加群となる．

この例から示唆されるように，クリフォード代数は外積代数に縮約による作用を加えて考えたものである．$\varepsilon > 0$ でパラメトライズされた Vの正定値内積の族 εQ に対し，対応するクリフォード代数の族 $C(V, \varepsilon Q)$ を考えることができる．$\varepsilon \to 0$ とすればクリフォード代数の関係式は外積代数のそれに収束し，この意味で $C(V, \varepsilon Q)$ は ΛVに収束する．また上の例での作用 $c(v)$ は外積 $v\wedge$に収束する．ε を**プランク定数**（Planck constant）のように見なして，このことをしばしば $C(V)$ は ΛVの**量子化**（quantization）と表現する．

$C(V)$ と ΛVはもちろん異なる代数であるが，両者はベクトル空間として同じ個数の元で生成されるので，ベクトル空間としては同型である．この同型を具体的

に与える表象写像をつぎのように定義する.

【定義 5.13】 表象写像 (symbol map) $\sigma : C(V) \to \Lambda V$ は上の例にあげた $C(V)$ 加群 ΛV の構造を用いて

$$\sigma(a) = c(a)1 \tag{5.48}$$

と定義される. ただし $1 \in \Lambda^0 V$ は ΛV の単位元を表す.

e_i を V の正規直交基底とする. $1 \leq i_1 < \cdots < i_j \leq n$ とすれば

$$\sigma(e_{i_1} \cdots e_{i_j}) = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_j}$$

である.

つぎのことは明らかであろう.

【命題 5.14】 表象写像 σ は

$$\mathbf{c}(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_j}) = e_{i_1} \cdots e_{i_j} \tag{5.49}$$

で定義される逆写像 $\mathbf{c} : \Lambda V \to C(V)$ をもつ.

非負整数 $i \geq 0$ に対し, $C_i(V)$ を $v_1 \cdots v_k$ $(k \leq i)$ と書かれる元によりはられる $C(V)$ の部分ベクトル空間とすることにより, クリフォード代数に自然なフィルターづけ

$$C_0(V) \subset C_1(V) \subset \cdots \subset C_n(V) = C(V) \tag{5.50}$$

が与えられる. とくに $C_0(V) = \mathbf{R}, C_1(V) = V \oplus \mathbf{R}$ である.

【命題 5.15】 上のフィルターづけに随伴する階数づけられた加群 $grC(V)$ は ΛV に同型であり, 同型は $v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \in \Lambda^i V$ を $\mathbf{c}(v_1 \wedge \cdots \wedge v_i) \in gr_i C(V)$ にうつす写像によって与えられる.

定義 5.13 の表象写像 σ は表象写像 $\sigma_i : C_i(V) \to gr_i C(V) \cong \Lambda^i V$を誘導し，$a \in C_i(V)$ に対し $\sigma(\alpha)$ の i 次成分 $\sigma(a)_{[i]}$ が $\sigma_i(a)$ に等しい．またフィルトレーション $C_i(V)$ は

$$C_i(V) = \sum_{k=0}^{i} \mathbf{c}(\Lambda^k V) \tag{5.51}$$

である．$v \in V$と $\alpha \in C(V)$ に対し，

$$\sigma([v, a]) = -2\iota(v)\sigma(a) \tag{5.52}$$

が成り立つ．

5.2.3　周　期　性

$\mathbf{R}^n$を標準内積をもつ n 次元ユークリッド空間とし，対応するクリフォード代数を $C(\mathbf{R}^n)$，その複素化を $C(\mathbf{R}^n) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ とする．

【補題 5.16】　任意の整数 $n > 0$ に対し

$$C(\mathbf{R}^{n+2}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong C(\mathbf{R}^n) \otimes_{\mathbf{R}} End(\mathbf{C}^2) \tag{5.53}$$

　が成り立つ．

証明　$e_1, \cdots, e_{n+2}$を $\mathbf{R}^{n+2}$の標準基底とする．線形写像

$$\mathbf{R}^{n+2} \longrightarrow C(\mathbf{R}^n) \otimes_{\mathbf{R}} End(\mathbf{C}^2) \tag{5.54}$$

で同型 (5.53) に拡張するものがあることをいえばよい．

$\gamma_1, \cdots, \gamma_4$を (5.31) のパウリ行列とする．$e_1, \cdots, e_n$は $\mathbf{R}^n$の標準基底であるから

$$e_j \longrightarrow e_j \otimes \gamma_2, \quad j = 1, \cdots, n \tag{5.55}$$

が定義でき，これを

$$\begin{aligned} e_{n+1} &\longrightarrow Id \otimes \gamma_3, \\ e_{n+2} &\longrightarrow Id \otimes \gamma_4 \end{aligned} \tag{5.56}$$

とおいて $\mathbf{R}^{n+2}$ からの写像に拡張する．$1 \in T(\mathbf{R}^{n+2}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ は $1 \otimes Id \in C(\mathbf{R}^n) \otimes_{\mathbf{R}} End(\mathbf{C}^2)$ に写されるものとして，(5.55), (5.56) は代数準同型写像

$$T(\mathbf{R}^{n+2}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow C(\mathbf{R}^n) \otimes_{\mathbf{R}} End(\mathbf{C}^2) \tag{5.57}$$

を定義する．これが $C(\mathbf{R}^{n+2})$ からの写像を誘導することは生成関係式をチェックすることで確かめられる．$j, l = 1, \cdots, n$ については

$$e_j \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot e_l \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = e_j e_l \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.58}$$

が成り立つ．残りの関係式はパウリ行列の性質から導かれる．したがって (5.57) は代数準同型

$$C(\mathbf{R}^{n+2}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow C(\mathbf{R}^n) \otimes_{\mathbf{R}} End(\mathbf{C}^2) \tag{5.59}$$

を与える．

この写像が全射であることを見るためには，$\alpha_e \in C^+(\mathbf{R}^n)$, $\alpha_o \in C^-(\mathbf{R}^n)$ として，非対角成分が

$$\begin{aligned} \alpha_e \cdot e_{k+1} &\longrightarrow \alpha_e \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_o \cdot e_{k+1} &\longrightarrow \alpha_o \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_e \cdot e_{k+2} &\longrightarrow \alpha_e \otimes \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \\ \alpha_o \cdot e_{k+2} &\longrightarrow \alpha_o \otimes \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.60}$$

で得られ，また対角成分が

$$\alpha_e \longrightarrow \alpha_e \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_o \longrightarrow \alpha_o \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha_e{\cdot}e_{k+1}\cdot e_{k+2} \longrightarrow \alpha_e \otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix},$$

$$\alpha_o{\cdot}e_{k+1}\cdot e_{k+2} \longrightarrow \alpha_o \otimes \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \tag{5.61}$$

で与えられることに注意すればよい．写像 (5.59) が単射であることもこれらからわかる． ■

【定理 5.17】 任意の整数 $n > 0$ に対し

$$C(\mathbf{R}^{2n}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong End(\mathbf{C}^{2^n}) \tag{5.62}$$

$$C(\mathbf{R}^{2n+1}) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong End(\mathbf{C}^{2^n}) \oplus End(\mathbf{C}^{2^n}) \tag{5.63}$$

が成り立つ．

証明　行列のブロック分解により

$$End(\mathbf{C}^n) \otimes End(\mathbf{C}^2) = End(\mathbf{C}^{2n}) \tag{5.64}$$

が成り立つ．(5.62) と (5.63) を得るには

$$C(\mathbf{R}^2) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong End(\mathbf{C}^2) \tag{5.65}$$

$$C(\mathbf{R}^1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong \mathbf{C} \oplus \mathbf{C} \tag{5.66}$$

をいえばよい．(5.16) は補題 5.16 からただちに得られる．(5.66) は同型写像

$$C(\mathbf{R}^1) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = span_{\mathbf{C}}\{1, e\} \longrightarrow span_{\mathbf{C}}\left\{\frac{1+e}{2}, \frac{1-e}{2}\right\} \tag{5.67}$$

によって与えられる． ■

5.2.4　スピノル群

行列で定義される $SO(n)$ などの**古典リー群**（classical Lie group）は，全**行列環**（matrix algebra）のなすベクトル空間の中に含まれる**リー代数**（Lie algebra）の元である行列 A の，指数べき級数 $\exp A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ を使って構成される．

これと同じ構成により，Vが正定値内積をもつ実ベクトル空間のとき，V の直交群 $SO(V)$ のリー代数 $so(V)$ の $C(V)$ への自然な埋め込みがあり，その指数べき

級数をとって $C(V)$ の中にスピノル群とよばれる**コンパクトリー群**（compact Lie group）がつくられることを示そう．クリフォード代数の中で指数べきをとることにより，$SO(V)$ の 2 重被覆群が得られるのである．

【命題 5.18】 $C^2(V) = \mathbf{c}(\Lambda^2 V)$ は $C(V)$ の交換子積に関して $C(V)$ のリー部分代数となり，$so(V)$ に同型である．同型は $a \in C^2(V)$ を $V = C^1(V)$ に

$$\tau(a)v = [a, v] \tag{5.68}$$

と作用させて得られる写像 $\tau : C^2(V) \to so(V)$ により与えられる．$[\ ,\ ]$ はクリフォード代数の超交換子である．

証明 $\tau(\alpha)$ が V の線形写像全体のなすリー環 $gl(V)$ へのリー代数としての準同型写像を与えることは見やすい．$so(V)$ への写像を与えることは，$[[v, w], a] = 0$ に注意して

$$Q(\tau(a)v, w) + Q(v, \tau(a)w) = -\frac{1}{2}[[a, v], w] - \frac{1}{2}[v, [a, w]] \tag{5.69}$$

がヤコビ恒等式により消えることからわかる．τ は単射であり，また $\dim C^2(V) = \dim so(V) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ であるから同型写像となる． ■

$\alpha \in C(V)$ に対し，$C(V)$ の積を用いて指数べき級数 $\exp_C a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} a^n$ が定義される．同様に $\alpha \in \Lambda V$ に対し ΛV の積により指数べき級数，$\exp_\Lambda \alpha$ をつくることができる．$\alpha \in \Lambda V$ が 0 次の成分を含まなければ，その指数べき級数は有限和である．

V を向きづけられた正定値内積空間とする．$\alpha \in \Lambda^2 V$ とし，ΛV の中で $\exp_\Lambda \alpha$ をつくり，そのベレジン積分 T による値を考えよう．これは $\exp_\Lambda \alpha$ の最高次の成分を向きづけられた正規直交基の外積のスカラー倍として表したときの係数である．

定義 5.6 と命題 5.7 からつぎの補題が得られる．

【補題 5.19】 V は偶数次元で向きづけられているとする．$a \in C^2(V)$ に対し $\sigma(a) \in \Lambda^2 V$ で

$$T(\exp_\Lambda \sigma(a)) = 2^{-\dim(V)/2} \det{}^{1/2}(\tau(a)) \tag{5.70}$$

が成り立つ．

$C^2(V)$ の元の $C(V)$ の中での指数べきの性質をみるのに，つぎの公式はしばしば有用である．

$v, w \in V$を $(v,v)=(w,w)=1, (v,w)=0$ を満たす元とするとき，$vw \in C^2(V)$ に対し，

$$\begin{aligned} \exp_C t(vw) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}(vw)^k \\ &= \cos t + (\sin t)vw \end{aligned} \tag{5.71}$$

が成り立つ．

【定義 5.20】 $C^2(V)$ の $C(V)$ の中での指数べきとして得られる群を**スピノル群**（spinor group）とよび，$Spin(V)$ と表す．

ちょうど球面がユークリッド空間にはいっているように，$Spin(V)$ はベクトル空間 $C^+(V)$ にはいっているコンパクト空間である．ただしその形は $\dim V \geq 4$ のとき球面より複雑である．

$C^2(V)$ の Vへの随伴作用 τ の指数べきは $Spin(V)$ の V への**直交群**（orthogonal group）による作用となる．この作用もまた τ で表すことにする．すると $g \in Spin(V)$, $v \in V$に対しつぎの関係が成り立つ．

$$gvg^{-1} = \tau(g)v \tag{5.72}$$

ここに左辺はクリフォード代数の積を表す．

【命題 5.21】 $\dim V > 1$ とする．準同型写像

$$\tau : Spin(V) \longrightarrow SO(V) \tag{5.73}$$

は**2重被覆写像**（2-fold covering map）である．

証明　指数べき写像は $SO(V)$ への全射なので τ は全射である．$g \in Spin(V)$ を $\tau(g)=1$ となる元とすると，すべての $v \in V$に対し $[g,v]=0$ となる．$\sigma([g,v]) = -2\iota(v)\sigma(g)$ が成り立つので，g はスカラーとなる．$\dim V > 1$ ならば，式（5.71）

で $t=\pi$とおいて $-1 \in Spin(V)$ となる．$v, w \in V$ が $(v, w)=0$ を満たせば，

$$(vw)^* = (-w)(-v) = -vw \tag{5.74}$$

となるので，$C^2(V)$ で $C(V)$ の標準的な反自己同型写像 $\alpha \to \alpha^*$は -1 を掛ける写像となる．$\alpha \in C^2(V)$ に対し，

$$\exp_C(a)^* = \exp_C(a^*) = \exp_C(-a) \tag{5.75}$$

が成り立つから，すべての $g \in Spin(V)$ に対し $gg^* = 1$ となる．したがって g がスカラーならば $g = \pm 1$ である．ゆえに τ は 2 重被覆写像である． ■

■ **例 5.2** ■ $\dim V = 2$ のとき多様体として $Spin(V)$ と $SO(V)$ はともに S^1であり，$\tau : S^1 \to S^1$ は $z \to z^2$ で与えられる．$\dim V = 3$ のとき $Spin(V)$, $SO(V)$ はそれぞれ 3 次元球面 S^3，**3 次元実射影空間**（real projective space） $\mathbf{RP}^3$ と同相であり，$\tau : S^3 \to \mathbf{RP}^3$ は**直径対称点**（antipodal point）を同一視する**商写像**（quotient map）である．

すべてのクリフォード加群は $Spin(V) \subset C^+(V)$ の表現空間である．このことから $Spin(V)$ の表現で $SO(V)$ の表現に落ちないものを構成することができるがそれは後まわしにしよう．

【命題 5.22】 クリフォード加群 E が自己共役ならば $Spin(V)$ の E 上の表現は**ユニタリ**（unitary）である．

証明 $a \in C^2(V)$ に対し $c(a)^* = c(a^*) = -c(a)$ であるので，$C^2(V)$ の E への作用は**歪随伴**（skew adjoint）である．したがって，$C^2(V)$ のクリフォード作用は指数べきをとることにより，$Spin(V)$ のユニタリ表現をもたらす． ■

以下にいくつかの関数を定義する．これらは上の指数べき写像の**ヤコビアン**（Jacobian, 関数行列式）に関連したものである．

【定義 5.23】 Vをベクトル空間とする．$X \in End(V)$ に対し，

$$J_V(X) = \frac{\sinh(X/2)}{X/2} = \frac{e^{X/2} - e^{-X/2}}{X}$$

$$j_V(X) = \det(J_V(X)) = \det\left(\frac{\sinh(X/2)}{X/2}\right) \tag{5.76}$$

とおく．

$C(V)$ から ΛV への2つの関数 $\sigma(\exp_C(a))$ と $\exp_\Lambda(\sigma a)$ を比較しよう．**スペクトル半径**（固有値の絶対値の最大値, spectral radius）が 2π より小さい $X \in End(V)$ に対し，$End(V)$ からそれ自身への解析的な写像

$$H_V(X) = \frac{X/2}{\tanh(X/2)} \tag{5.77}$$

を考える．$H_V(0) = 1$ であるから，0 の近傍において，$H_V^{1/2}(X) \in GL(V)$ を定義することができる．$a \in C^2(V)$ に対し，$H_V(a) = H_V(\tau(a))$, $j_V(a) = j_V(\tau(a))$ と書く．

【命題 5.24】　$a \in C^2(V)$ が十分小さいとき，

$$\sigma(\exp_C(a)) = j_V^{1/2}(a)\det(H_V^{1/2}(a))\big(H_V^{-1/2}(a)\exp_\Lambda(\sigma(a))\big) \tag{5.78}$$

が成り立つ．ただし右辺の最後の括弧のなかで，$H_V^{-1/2}(a)$ は $\exp_\Lambda(\sigma(\alpha))$ に V への作用から誘導される ΛV への作用によってはたらく．

証明　V の正規直交基底 $(e_i)_{i=1}^n$ を

$$a = \theta_1 e_1 e_2 + \theta_2 e_3 e_4 + \cdots \tag{5.79}$$

となるように選んで，V が2次元で $a = \theta e_1 e_2$ である場合に帰着させることができる．この場合は $\exp_C a = \cos\theta + \sin\theta e_1 e_2$ であるが，$j_V^{1/2}(a) = \theta^{-1}\sin\theta$, $H_V^{1/2}(a)e_1 \wedge e_2 = \theta\cot\theta e_1 \wedge e_2$ で成り立つ．■

上の命題の証明から，$so(V)$ の $Xe_{2i-1} = 2\theta_i e_{2i}$, $Xe_{2i} = -2\theta_i e_{2i-1}$, $1 \leq i \leq$

$\dim(V)/2$ のかたちの元に対し，

$$j_V(X) = \prod_{i=1}^{l} \left(\frac{\sin\theta_i}{\theta_i} \right)^2 \tag{5.80}$$

となることがわかる．したがって $j_V(X)$ は解析的な 2 乗根

$$j_V^{1/2}(X) = \prod_{i=1}^{l} \frac{\sin\theta_i}{\theta_i} \tag{5.81}$$

をもつ．

【命題 5.25】　関数 $j_V^{1/2}(X)$ は $so(V)$ の解析関数に拡張する．

5.3　スピノル表現

Vは偶数次元 n で向きづけられていると仮定する．Vの向きづけられた正規直交基底を選んで $V \cong \mathbf{R}^n$と同一視すれば，定理 5.17 から $C(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong End(\mathbf{C}^{2^{n/2}})$ であるから，$C(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ はただ 1 つの $2^{n/2}$次元複素既約表現をもつことがわかる．これはクリフォード代数のスピノル表現とよばれるものである．

この節ではこのスピノル表現を，Vの複素構造を用いるより内在的な方法で構成する．これは複素多様体上のクリフォード代数などを考えるとき，とくに有効である．

【補題 5.26】　$(e_i)_{i=1}^{n}$ をVの向きづけられた正規直交基底とし，**向き作用素**（chirarity operator）を

$$\Gamma = i^{n/2} e_1 \cdots e_n \tag{5.82}$$

と定義する．$\Gamma \in C(V) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ はVの向きづけられた正規直交基底のとり方によらず決まり，

$$\Gamma^2 = 1, \qquad \Gamma\nu = -\nu\Gamma \quad (\nu \in V) \tag{5.83}$$

を満たす．

この補題により E が複素クリフォード加群ならば，E の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけを

$$E^{\pm} = \{v \in E \mid \Gamma v = \pm v\} \tag{5.84}$$

とおいて定義することができる．さらに V の次元が 4 の倍数ならば，Γ は $C(V)$ の元なので，実クリフォード加群に対しても，同様に $\mathbf{Z}_2$ 階数づけを定義することができる．

さて正定値内積をもつ実ベクトル空間 (C,V) には，$Q(x,x)=0$ となる $x \in V$ は 0 以外に存在しない．しかし V の複素化 $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ に Q をそのまま複素線形に拡張した空間を考えれば，$Q(w,w)=0$ を満たす $w \in V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ は存在し，このような元のみをもつ最大次元の部分ベクトル空間（**ラグラジアン**（Lagrangian）とよばれる）は次元 $n/2$ をもつ．

【定義 5.27】 複素ベクトル空間 $V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の**偏極**（polarization）とは，$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の複素部分空間 P で

$$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = P \oplus \bar{P}$$

を満たしかつ，すべての $w \in P$ に対し $Q(w,w)=0$ を満たすものであると定義する．

偏極 P が向きづけられているとは，V の向きづけられた正規直交基底 $(e_i)_{i=1}^n$ があって，P が $\{e_{2j-1} - ie_{2j} \mid 1 \leq j \leq n/2\}$ で張られていることと定義する．

$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = P \oplus \bar{P}$ の分解で Q は P と $\bar{P}$ の間の双対関係を与えていることに注意しよう．

定義に与えられたラグラジアン P の全体は多様体の構造をもち，$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の**ラグラジアングラスマン**（Lagrangian Grassmann）とよばれる．偏極は実ベクトル空間 V の複素構造と同じものであることをつぎに見よう．

【定義 5.28】 実ベクトル空間 V の線形自己同型 J で

$$J^2 = -1$$

を満たすものを Vの**複素構造**（complex structure）とよぶ．

偏極 P は射影 $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\to V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}/V\otimes i=V$ によって V に同型に写される．P は複素ベクトル空間なので，この同型により P と V を同一視して V に複素構造がはいる．

逆に Vに複素構造 J を入れると，J をそのまま複素線形に $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ に拡張して $P=\{w\in V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\mid Jw=iw\}$ とおけば，P は $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の偏極となる．このように $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の偏極と Vの複素構造とは1対1に対応する．

また $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の向きづけられた偏極は以下にみるように，**スピノル表現**（spinor representation）とよばれる $C(V)$ の重要な表現空間 $S=S_P$をもたらし，複素クリフォード加群 $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の行列代数との同型を与える（つまり定理5.17の同型を再確認することになる）．

【命題5.29】 Vは偶数次元 n で向きづけされているとする．**スピノル加群**（spinor module）とよばれる $\mathbf{Z}_2$ 階数づけられた複素クリフォード加群 $S=S^+\oplus S^-$ が存在して，

$$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}=End(S)=S\otimes S^* \tag{5.85}$$

を満たす．とくに，$\dim S=2^{n/2}, \dim S^+=\dim S^-=2^{(n/2)-1}$ である．

証明 Pを $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の向きづけられた偏極とする．双一次形式 Q により，$V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ で P と $\bar{P}$ は互いに双対の関係になる．つまり Q は同型 $\bar{P}\cong P^*$を与える．スピノル空間 S を，P の外積代数 $S=\Lambda P$として定義しよう．

$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の S への作用は，Vの元の S への作用を与えれば定義される．Vの元 v は，$V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の中で P と $\bar{P}$ の成分の和に分解される．そこで P 成分は ΛP に外積により作用させ，$\bar{P}$ 成分は P^*の元と見なして，ΛP に縮約で作用させることにする．$s\in S=\Lambda P$ に対し，

$$\begin{aligned} c(w)s&=2^{1/2}(w\wedge)s, \qquad w\in P,\\ c(\bar{w})s&=-2^{1/2}\iota(\bar{w})s, \qquad \bar{w}\in\bar{P} \end{aligned} \tag{5.86}$$

とおく．これは，$V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}=P\oplus\bar{P}$ により，$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 加群としての構造を S に

定義する．

$C(V)$ のどの元も S に非自明に作用し，$\dim C(V)=(\dim S)^2$ から，$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}=End(S)$ がわかる．$End(S)$ は S の基底をとって表現すれば，$\dim S=2^{n/2}$次の複素行列全体のなす代数である．したがって $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ は行列代数に同型である．一般に行列代数は同型を除いてただ1つの既約表現しかもたないので，スピノル表現は $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 既約加群として一意である．

Vの偏極 P が向きづけられているとする．向き作用素 Γ に対し，$S=\Lambda P$ へのその作用 $c(\Gamma)$ を見てみよう．$w_j=2^{-1/2}(e_{2j-1}-ie_{2j})$ とおけば，

$$\Gamma=2^{-n/2}(w_1\bar{w}_1-\bar{w}_1w_1)\cdots(w_{n/2}\bar{w}_{n/2}-\bar{w}_{n2}w_{n/2}) \tag{5.87}$$

と書け，Γ は ΛP に

$$(-1)^{-n/2}((w_1\wedge)\iota(\bar{w}_1)-\iota(\bar{w}_1)(w_1\wedge))\cdots((w_{n/2}\wedge)\iota(\bar{w}_{n/2})-\iota(\bar{w}_{n/2})(w_{n/2}\wedge)) \tag{5.88}$$

で作用し，これは Λ^kP の上で $(-1)^k$に等しい．そこで

$$S^{\pm}=\Lambda^{\pm}P \tag{5.89}$$

とおけばこれらはそれぞれ ±1 を固有値とする Γ の固有空間であり，$S=S^+\oplus S^-$ かつ $\dim S^+=\dim S^-=1/2\dim S$ である．■

上の証明でつくられた S は $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の偏極 P によっているが，異なる P に対しそれらはすべて同型である．さきに述べたように，$V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ の偏極は V の複素構造と同じものであり，したがってVの複素構造 J に対応してスピノル加群 S_J ができる．異なる J に対し，対応する S_J は互いに同型である．

$S_J=\Lambda P$ はVを J により複素ベクトル空間 V_Jと見なして複素数体上の外積代数をとった ΛV_Jと同じである．

素粒子物理学では ΛP は**フェルミオンフォック空間**（Fermion Fock space）とよばれ，Λ^kP はフェルミオン粒子が k 個存在する状態を表す．$V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}=P\oplus\bar{P}$ の分解で P の元は外積により粒子を1つ増やし，$\bar{P}$ の元は縮約により粒子を1つ減らす作用をする．これらをそれぞれ**生成作用素**（creation operator），**消滅作用素**（annihilation operator）とよぶ．

$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}=S\otimes S^*$の分解で，$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ は$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$左加群として $\dim S^*=$

$2^{n/2}$個の S の直和に同型であることがわかる．また $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 右加群として $\dim S^* = 2^{n/2}$個の $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 右加群 S^*の直和に同型である．これらをあわせて $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ は行列代数と同型になっている．

■ **例 5.3** ■ $\dim V = 2$, $V = \{e_1, e_2\}$ としよう．

$$S_1 = \{1 + ie_1e_2\ ,\ e_1 - ie_2\}, \quad S_2 = \{e_2 - ie_1\ ,\ e_1e_2 + i\} \tag{5.90}$$

が S と同型な $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 加群であり，$C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C} = S_1 \oplus S_2$である．

$Spin(V) \subset C^+(V)$ であるから，上で構成した $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ のスピノル表現 $S = S^+ \oplus S^-$の S^+と S^-はともに，$Spin(V)$ の表現となる．そこでつぎの定義をする．

【定義 5.30】 S^+と S^-を $Spin(V)$ の**半スピノル表現**（half-spinor module）とよぶ．

$Spin(V)$ の半スピノル表現は幾何学で重要な役割を果たす．

【定義 5.31】 $S = S^+ \oplus S^-$の $Spin(V)$ 表現を ρ で表す．

【定義 5.32】 $C(V)$ の超トレースを，

$$Str(a) = Tr_S(\Gamma a) = \begin{cases} Tr_{S^+}(a) - Tr_{S^-}(a) & a \in C^+(V) \\ 0 & a \in C^-(V) \end{cases} \tag{5.91}$$

で定義する．

【命題 5.33】 $T : \Lambda V \to \mathbf{R}$ を 3.7 節定義 3.29 のベレジン積分とする．つぎの式が成り立つ．$a \in C(V)$ に対し

$$Str(a) = (-2i)^{n/2} T \circ \sigma(a) \tag{5.92}$$

証明　$(e_i)_{i=1}^n$をVの向きづけられた正規直交基底とする．任意の $I \subset 1, \cdots, n$ に対し，$e_I = \prod_{i\in I} e_i$とおく．集合 $\{e_I \mid I \subset 1, \cdots, n\}$ は $C(V)$ の基底をなす．$|I| < n$ ならば $j \notin I$ に対し，

$$e_I = -\frac{1}{2}[e_j, e_j e_I] \tag{5.93}$$

となり，したがって

$$[C(V), C(V)] = C_{n-1}(V) \tag{5.94}$$

がわかる．ゆえに $a \in C_{n-1}(V)$ のとき $Str(\alpha) = 0$ である．また，$Str(\Gamma) = \dim \Lambda P = 2^{n/2}$から命題の公式を得る．■

とくに $a \in C^2(V)$ のとき，命題 5.33 と命題 5.24 から $T(H_V^{-1/2}(a) \exp_\Lambda \sigma(a)) = \det(H_V^{-1/2}(a))T(\exp_\Lambda \sigma(a))$ を用いて

$$Str(\exp_C a) = (-2i)^{n/2} j_V^{1/2}(a) T(\exp_\Lambda \sigma(a)) \tag{5.95}$$

が得られる．

$\tau : Spin(V) \to SO(V)$ を命題 5.21 の写像とする．

【補題 5.34】　$g \in Spin(V)$ のとき，

$$T(\sigma(g))^2 = \det((1-\tau(g))/2) \tag{5.96}$$

証明　計算は $\dim V = 2$ で $g = \cos\theta + \sin\theta e_1 e_2$のときに帰着でき，そのとき

$$\det((1-\tau(g))/2) = (1-e^{2i\theta})(1-e^{-2i\theta})/4 = \sin^2\theta \tag{5.97}$$

となる．■

とくに $g \in Spin(V)$ で $\det(1-\tau(g))$ が可逆ならば $T(\sigma(g)) \in \Lambda^n V$ は 0 でない．$T(\sigma(g))$ が $\Lambda^n V$の正（負）の元であるとき $\varepsilon(g) = +1\,(-1)$ とおく．

$\det(1-\tau(g))$ が $\tau(g)$ の ΛV 表現の超トレースであることを考えれば，つぎの命題は $\rho(g)$ がその “平方根表現” であることを表している．

【命題 5.35】　$g \in Spin(V)$ のとき，

$$Str(\rho(g)) = i^{-n/2}\varepsilon(g)\,|\det(1-\tau(g))|^{1/2} \tag{5.98}$$

定義 5.23 に与えた指数べき写像のヤコビアンと上に述べた計算は，第 8 章のガ

ウス・ボンネ・チャーン定理とヒルツェブルフ符号定理に用いられる．定義 5.23 の式は指数定理において基本的な $\widehat{A}$ 種類（定義 3.16 および定義 7.15 参照）と同じかたちをもっている．これは偶然ではなく $\widehat{A}$ 種数はチャーン・ヴェイユ写像によってスピノル群の体積要素から誘導されるコホモロジー類になっているのである．

【命題 5.36】 スピノル空間 S には定数倍をのぞいて一意的な内積があり，それに関して S は自己共役クリフォード加群になる．さらに，S^+ と S^- は互いに直交する．

証明　S は既約 $C(V)$ 加群であるから一意性は明らかである．P の内積を $w \in P$ に対し $(w, \bar{w})$ で入れる．これは ΛP に拡張し，$S^+ = \Lambda^+ P$ は $S^- = \Lambda^- P$ に直交する．$v \in V$ に対し $c(v)$ の作用は**歪随伴**（skew-adjoint）である．一方 $v = w + \bar{w}$ と書け，$c(v)$ は ΛP に $\sqrt{2}\,((w\wedge) - \iota(\bar{w}))$ で作用し，これは歪随伴である．　■

【命題 5.37】 すべての有限次元の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけられた複素 $C(V)$ 加群 E は $W \otimes S$ のかたちの $C(V)$ 加群に同型である．ただし W は自明な $C(V)$ 加群である．このとき $W = Hom_{C(V)}(S, E)$ であり，$End(W)$ は $End_{C(V)}(E)$ に同型である．

証明　$C(V)$ は行列代数 $End(S)$ に同型であり，すべての行列代数の有限次元加群は $W \otimes S$ のかたちをもつ．$End_{C(V)}(E) \otimes S$ と E との同型は $w \otimes s \to w(s)$ により与えられる．　■

上の W は $C(V)$ 加群 E の**係数空間**（twisting space）とよばれる．

$Str_S(\Gamma) = 2^{n/2}$ だから，$F \in End(W) = End_{C(V)}(E)$ の W 上の超トレースは

$$Str_W(F) = 2^{-n/2} Str_E(\Gamma F) \tag{5.99}$$

で与えられる．これからつぎの定義を得る．

【定義 5.38】 **相対超トレース**（relative super trace）を

$$Str_{E/S}(F) = 2^{-n/2} Str_E(\Gamma F) \tag{5.100}$$

で定義する．

W が階数づけをもたないときは，これは Wトレースに等しく E トレースに比例する．

$$Tr_W(F) = Str_{E/S}(F) = 2^{-n/2}Tr_E(\Gamma F) \tag{5.101}$$

Vがエルミート内積をもつ複素ベクトル空間のときは，Vのユニタリ変換のなす群 $U(V)$ は $SO(V)$ の部分群である．分解

$$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = V^{1,0} \oplus V^{0,1} \tag{5.102}$$

ができる．ここに$V^{1,0}$，$V^{0,1}$はVの複素構造 J がそれぞれ $+i$, $-i$ で作用する部分空間である．このとき，$V^{1,0}$は$V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ の偏極となり，$S = \Lambda V^{1,0}$をスピノル空間としてとることができる．

一方 Vの複素変換は $V^{1,0}$を保つので，$U(V)$ の $V^{1,0}$上の自然な表現 λ がある．ρ を $Spin(V)$ の表現の $\tau^{-1}(U(V))$ への制限とする．$U(V)$, $Spin(V)$ のリー代数の対応する微分表現を同じ記号で表せば，これらはつぎのような関係をもつ．

【補題 5.39】 $a \in C^2(V)$ とする．V上 $\tau(\alpha)$ が複素線形ならば，

$$\rho(a) = \lambda(\tau(a)) - \frac{1}{2}Tr_{V^{1,0}}\tau(a) \tag{5.103}$$

証明　$V^{1,0}$ の $\mathbf{C}$ 基底 w_jを $\tau(a)w_j = \lambda_j w_j$, $(w_j, \bar{w}_i) = \delta_{ij}$ であるように選ぶ．すると，$a = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n/2}\lambda_i(\bar{w}_i w_i - w_i\bar{w}_i)$ であり

$$\begin{aligned} \lambda(\tau(a)) &= \sum_{i=1}^{n/2}\lambda_i(w_i\wedge)\iota(\bar{w}_i) \\ \rho(a) &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n/2}\lambda_i((w_i\wedge)\iota(\bar{w}_i) - \iota(\bar{w}_i)(w_i\wedge)) \end{aligned} \tag{5.104}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \lambda(\tau(a))w_j &= \lambda_j w_j \\ \rho(a)w_j &= \frac{1}{2}\lambda_j w_j - \frac{1}{2}\left(\sum_{i\neq j}\lambda_i\right)w_j \end{aligned}$$

$$= \lambda_j w_j - \frac{1}{2}\left(\sum_i \lambda_i\right) w_j \tag{5.105}$$

から，$\rho(a) = \lambda(\tau(a)) - \dfrac{1}{2}\sum\lambda_i$ が得られる． ■

この補題は，λ が $Spin(V)$ の表現 ρ の制限と，$U(V)$ の 2 重被覆 $\tau^{-1}(U(V))$ の 1 次元表現 $\det_{\mathbf{C}}^{1/2}$ だけ異なっていることをいっている．これは第 8 章 8.4 節でケーラー多様体上の $\bar{\partial}$ 作用素を扱うときに用いられる．

6

ディラック作用素

ディラック作用素の定義を与える．本来のディラック作用素は 6.3 節で定義されるスピン多様体上のスピノルバンドルで定義されるものであるが，アティヤ・シンガーによる一般化されたかたちで導入する．

ディラック作用素は空間に広がったスピノル場がその微分を通して粒子の生成消滅にあずかり，新しいスピノル場を生み出す過程としてとらえることができる．この過程の定常状態にあたるものがディラック作用素の核をなすスピノル場であり，その次元を考察するのが指数定理である．

6.1　超バンドルと接続

5.1 節でクリフォード代数のための準備として，超空間のフォーマリズムを述べたが，ここでクリフォードバンドルのための準備として，超バンドルのフォーマリズムについて述べる．

$\mathbf{Z}_2$ 階数づけをもつバンドルを超バンドルとよぶ．

【定義 6.1】 多様体 M 上の**超バンドル** (super bundle) とは，バンドル $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ で $\mathcal{E}^+, \mathcal{E}^-$ がともに M 上のバンドルであるもののことである．$\mathcal{E}$ のファイバーは超空間である．

$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ を多様体 M 上の超バンドルとする．$\Omega(M, \mathcal{E})$ を $\mathcal{E}$ 値微分形式の空間とする．この空間は微分形式の次数によって与えられる $\mathbf{Z}$ 階数づけをもつ．

$\alpha \in \Omega(M, \mathcal{E})$ の次数 i の成分を $\alpha_{[i]}$ と書く．さらに

【定義 6.2】 超バンドル $\mathcal{E}$ に対し

$$\Omega^{\pm}(M, \mathcal{E}) = \sum_i \Omega^{2i}(M, \mathcal{E}^{\pm}) \oplus \sum_i \Omega^{2i+1}(M, \mathcal{E}^{\mp}) \tag{6.1}$$

とおいて $\Omega(M, \mathcal{E})$ の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけ

$$\Omega(M, \mathcal{E}) = \Omega^{+}(M, \mathcal{E}) \oplus \Omega^{-}(M, \mathcal{E}) \tag{6.2}$$

を定義する．

$\mathbf{g}$ が M 上の超リー代数のバンドルであるとき，$\Omega(M, \mathbf{g})$ は

$$[\alpha_1 \otimes X_1, \alpha_2 \otimes X_2] = (-1)^{|X_1||\alpha_2|}(\alpha_1 \wedge \alpha_2) \otimes [X_1, X_2] \tag{6.3}$$

によって定義される**超リー括弧積**（super Lie bracket）に関して超リー代数となる．

同様に $\mathcal{E}$ が $\mathbf{g}$ の作用 ρ をもつ $\mathbf{g}$ 加群の超バンドルならば，$\Omega(M, \mathcal{E})$ は $\Omega(M, \mathbf{g})$ の超加群となり，その作用は

$$\rho(\alpha \otimes X)(\beta \otimes v) = (-1)^{|X||\beta|}(\alpha \wedge \beta) \otimes [X_1, X_2] \tag{6.4}$$

で与えられる．とくにこの構成は超バンドルに付随する超リー代数のバンドル $End(\mathcal{E})$ に適用される．$\Lambda T^*M \otimes \mathcal{E}$ は超リー代数 $\Lambda T^*M \otimes End(\mathcal{E})$ 加群のバンドルであるから，$\Omega(M, End(\mathcal{E}))$ は $\Omega(M, \mathcal{E})$ を超加群としてもつ超リー代数となる．

【定義 6.3】 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{+} \oplus \mathcal{E}^{-}$ を多様体 M 上の超バンドルとする．$\mathcal{E}^{+}, \mathcal{E}^{-}$ の接続 $\nabla^{\mathcal{E}^{+}}$, $\nabla^{\mathcal{E}^{-}}$ によって $\nabla^{\mathcal{E}} = \nabla^{\mathcal{E}^{+}} \oplus \nabla^{\mathcal{E}^{-}}$ と書かれるものを $\mathcal{E}$ の接続とよぶ．

$\mathcal{E}$ の接続 ∇ は 1 階微分作用素

$$\nabla : \Omega^{\pm}(M, E) \longrightarrow \Omega^{\mp}(M, E) \tag{6.5}$$

で $\alpha \in \Omega(M),\ \theta \in \Omega(M, E)$ に対し

$$\nabla(\alpha\wedge\theta)=d\alpha\wedge\theta+(-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\nabla\theta \tag{6.6}$$

を満たす．∇ が $\mathcal{E}$ の接続ならば ∇ は $\Omega(M,End(\mathcal{E}))$ に

$$\nabla\alpha=[\nabla,\alpha],\quad \alpha\in\Omega(M,End(\mathcal{E})) \tag{6.7}$$

を満たすように作用する．

接続 ∇ の曲率とは $\Omega(M,\mathcal{E})$ の作用素 ∇^2 のことである．

$\mathcal{E}$ と $\mathcal{F}$ が超バンドルならば，$\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ は

$$\begin{aligned}(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})^+&=\mathcal{E}^+\otimes\mathcal{F}^+\oplus\mathcal{E}^-\otimes\mathcal{F}^-,\\(\mathcal{E}\otimes\mathcal{F})^-&=\mathcal{E}^+\otimes\mathcal{F}^-\oplus\mathcal{E}^-\otimes\mathcal{F}^+\end{aligned} \tag{6.8}$$

で $\mathbf{Z}_2$階数づけられた超バンドルである．$\nabla^{\mathcal{E}}$と $\nabla^{\mathcal{F}}$がそれぞれ$\mathcal{E}$と $\mathcal{F}$ の上の接続ならば，$\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$ の上のテンソル積接続 $\nabla^{\mathcal{E}}\otimes1+1\otimes\nabla^{\mathcal{F}}$が，$\alpha\in\Omega(M,\mathcal{E})$ と $\beta\in\Omega(M,\mathcal{F})$ に対し

$$\left(\nabla^{\mathcal{E}}\otimes1+1\otimes\nabla^{\mathcal{F}}\right)(\alpha\wedge\beta)=\nabla^{\mathcal{E}}\alpha\wedge1+(-1)^{|\alpha|}\alpha\wedge\nabla^{\mathcal{F}}\beta \tag{6.9}$$

として定義される．

6.2　超トレースと特性形式

多様体 M上の超バンドルを $\mathcal{E}=\mathcal{E}^+\oplus\mathcal{E}^-$ とする．5.1 節の定義 5.2 により，各点 $x\in M$で超トレース $Str_x:End(\mathcal{E})_x\to\mathbf{C}$ が定義される．これからバンドル写像

$$Str:\Lambda T^*M\otimes End(\mathcal{E})\longrightarrow\Lambda T^*M \tag{6.10}$$

が得られ，このバンドル写像を切断に作用させて，

$$Str:\Omega(M,End(\mathcal{E}))\longrightarrow\Omega(M) \tag{6.11}$$

が定義される．これを単に**超トレース**（super trace）とよぶことにする．

Str は $\alpha\in\Omega(M)$，$A\in\Gamma(M,End(\mathcal{E}))$ に対し，$Str(\alpha\otimes A)=\alpha Str(A)$ を満たす．

$\nabla=\nabla^+\oplus\nabla^-$ を $\mathcal{E}$ の接続とし，$F=\nabla^2\in\Omega^2(M,End(\mathcal{E}))$ を接続 ∇ の曲率とする．$F^+=(\nabla^+)^2$，$F^-=(\nabla^-)^2$ とおけば $F=F^++F^-$ であり，F は M上の $End(\mathcal{E})$ 値 2 次微分形式である．

z の多項式 $f(z)$ に対して

$$f(F)=\sum\frac{f^{(k)}(0)}{k!}(F)^k \tag{6.12}$$

とおく．これに $Str:\Omega^+(M,End(\mathcal{E}))\to\Omega^+(M)$ を作用させて M上の微分形式を得るが，それを $Str\,f(F)$ と書き，多項式 $f(z)$ に対する**特性形式**（characteristic form）とよぶ．$Str\,f(F)$ は F の不変多項式であるから，3.1 節，3.2 節で証明した種々の結果が成り立つわけであるが，Str に特有のかたちで公式化できるので，あえて重複をいとわずつぎにあげよう．

【命題 6.4】 つぎが成り立つ．

(1) 特性形式 $Str\,f(F)$ は偶数次数の閉微分形式である．

(2) ∇_t が $\mathcal{E}$ 上の接続の微分可能 1 パラメーター族で $F_t=(\nabla_t)^2$ を対応する曲率形式の 1 パラメーター族とすれば，

$$\frac{d}{dt}Str\,f(F_t)=d\,Str\left(\frac{d\nabla_t}{dt}f'(F_t)\right) \tag{6.13}$$

である．

(3) ∇_0,∇_1 を E 上の 2 つの接続，F_0,F_1 を対応する曲率形式とすれば，微分形式 $Str\,f(F_0),Str\,f(F_1)$ は同じドラームコホモロジー類に属する．

証明　まず，任意の $\alpha\in\Omega(M,End(\mathcal{E}))$ に対し，

$$d(Str\ \alpha)=Str([\nabla,\alpha]) \tag{6.14}$$

となることを証明する．

局所座標系 $U\subset M$ 上で $\mathcal{E}$ の自明化を選び，$\nabla=d+\omega$ と書く．ここに $\omega\in\Omega^1(U,End^+(\mathcal{E}))$ はこの座標系に関する ∇ の接続形式である．すると

$$Str([\nabla,\alpha])=Str([d,\alpha])+Str([\omega,\alpha]) \tag{6.15}$$

であるが，右辺の第 2 項は 0 であり，第 1 項は $Str(d\alpha)$ に等しい．これで (6.14) が証明された．このことから，

$$d\,Str(f(\nabla^2)) = Str([\nabla, f(\nabla^2)]) = 0 \tag{6.16}$$

がわかり，したがって $Str\, f(\nabla^2)$ は閉形式である．$Str\, f(\nabla^2)$ が偶数次数であることは，$Str\, f(\nabla^2)$ が偶数次数であることと Str が次数を保つことから明らかである．

∇_tを $\mathcal{E}$ 上の接続の微分可能 1 パラメーター族とする．

$$\frac{d\nabla_t^2}{dt} = \left[\nabla_t, \frac{d\nabla_t}{dt}\right] \tag{6.17}$$

が成り立つ．ただし，[ ] は $\nabla_t, \dfrac{d\nabla_t}{dt}$ がともに奇作用素であるから反交換子を表す．さて，$\alpha_t : [0,1] \to \Omega^+(M, End(E))$ を M上の偶数全次数の $End(E)$ 値微分形式の族とすれば，

$$\frac{d}{dt} Str(f(\alpha_t)) = Str(\dot{\alpha}_t f'(\alpha_t)) \tag{6.18}$$

が成り立つ．ただし $\dot{\alpha}_t$ は α_tの t に関する微分を表す．これを証明するには，$f(z) = z^n$ の場合を考えれば十分である．

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} Str(\alpha_t^n) &= Str\left(\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_t^i \dot{\alpha}_t \alpha_t^{n-i-1}\right) \\ &= n Str(\dot{\alpha}_t \alpha_t^{n-1})\end{aligned} \tag{6.19}$$

である．これを $\alpha_t = \nabla_t^2$ に適用して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} Str(f(\nabla_t^2)) &= Str\left(\frac{d\nabla_t^2}{dt} f'(\nabla_t^2)\right) \\ &= Str\left(\left[\nabla_t, \frac{d\nabla_t}{dt} f'(\nabla_t^2)\right]\right) \\ &= d\,Str\left(\frac{d\nabla_t}{dt} f'(\nabla_t^2)\right)\end{aligned} \tag{6.20}$$

が得られる（2 番目の等号は $[\nabla_t, \nabla_t^2] = 0$ による）．∇_0, ∇_1が 2 つの接続で $\omega = \nabla_1 - \nabla_0$とする．族

$$\nabla_t = (1-t)\nabla_0 + t\nabla_1 = \nabla_0 + t\omega \tag{6.21}$$

に上の公式を適用して

$$Str(f(\nabla_1^2)) - Str(f(\nabla_0^2)) = d\int_0^1 Str(\omega f'(\nabla_t^2))dt \tag{6.22}$$

を得る．これは $Str(f(\nabla_0^2))$ と $Str(f(\nabla_1^2))$ が完全形式だけ異なることを示している． ■

【定義 6.5】 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ を複素超ベクトルバンドルとする．$f(z) = \exp(iz/2\pi)$ としたときの特性形式を**チャーン指標**（Chern character）とよび，

$$ch(\nabla) = Str(e^{iF/2\pi}) \tag{6.23}$$

と書く．

チャーン指標は超バンドルと接続の直和に関して加法的である．

$$ch(A \oplus B) = ch(A) + ch(B) \tag{6.24}$$

さらに接続をもつ超バンドルのテンソル積に関しては，乗法的である．

$$ch(A \otimes 1 \oplus 1 \otimes B) = ch(A) \wedge ch(B) \tag{6.25}$$

これらの公式は $ch(A)$ を指標とよぶ理由を表している．

接続の族に対するチャーン指標の**転入公式**（transgression formula）は

$$\frac{d}{dt}ch(\nabla_t) = -d\,Str\left(\frac{d\nabla_t}{dt}e^{-\nabla_t^2}\right) \tag{6.26}$$

であり，これから

$$ch(\nabla_0) - ch(\nabla_1) = d\int_0^1 Str\left(\frac{d\nabla_t}{dt}e^{-\nabla_t^2}\right)dt \tag{6.27}$$

が得られる．

【命題 6.6】 $ch(A)$ のコホモロジー類は $\mathcal{E}$ の接続 ∇ のとり方によらない．これを $ch(\mathcal{E})$ で表す．

$\nabla = \nabla^+ + \nabla^-$と表せば

$$ch(\nabla) = ch(\nabla^+) - ch(\nabla^-) \tag{6.28}$$

となる．とくに，対応するコホモロジー類をとれば

$$ch(E) = [ch(\nabla^+)] - [ch(\nabla^-)] = ch(E^+) - ch(E^-) \tag{6.29}$$

を得る．

6.2.1　クリフォード加群

5.2節でクリフォード代数とクリフォード加群を定義したが，リーマン多様体Mに対しMの各点での（余）接ベクトル空間は正定値内積をもつので，Mの各点で5.2節の構成を行うことができる．

【定義 6.7】 Mがリーマン多様体のとき，M上の**クリフォードバンドル**（Clifford bundle）$C(M)$とは，$x \in M$でのファイバーが，ユークリッド空間T_x^*Mのクリフォード代数$C(T_x^*M)$であるクリフォード代数バンドルと定義する．

$C(M)$は正規直交枠バンドルの**随伴バンドル**（associated bundle）として

$$C(M) = O(M) \times_{O(n)} C(\mathbf{R}^n) \tag{6.30}$$

と表すことができる．この表示から$C(M)$はレビ–チビタ接続をもつことがわかり，それはつぎの意味でクリフォード積と両立する．すべての$a, b \in \Gamma(M, C(M))$に対し，

$$\nabla(ab) = (\nabla a)b + a(\nabla b) \tag{6.31}$$

が成り立つ．

【定義 6.8】 **表象写像**（symbol map）

$$\sigma : C(M) \longrightarrow \Lambda T^*M \tag{6.32}$$

が$\sigma_x : C(T_x^*M) \to \Lambda T_x^*M$により定義される．

【定義 6.9】　（クリフォード加群）

(1)　偶数次元多様体 M 上の**クリフォード加群**（Clifford module）$\mathcal{E}$ とは，M 上の超バンドル $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ で，$C(M)$ の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけられた作用

$$(a, s) \longrightarrow c(a)s, \quad a \in \Gamma(M, C(M)),\ s \in \Gamma(M, \mathcal{E}) \tag{6.33}$$

をもつものとして定義する．

(2)　$\mathcal{E}$ が計量 h をもつクリフォード加群で，$\mathcal{E}^+$ と $\mathcal{E}^-$ が直交するとする．クリフォード作用が M の各点で**自己共役**（self-adjoint）であるとき，つまり $a \in T^*M$ に対し $c(\alpha)$ の作用が**歪随伴**（skew-adjoint）であるとき，$\mathcal{E}$ は**自己共役**（self-adjoint）であるという．

(3)　$\mathcal{W}$ が超ベクトルバンドルであるとき，$\mathcal{E}$ を $\mathcal{W}$ で係数づけた（twisted）バンドル $\mathcal{W} \otimes \mathcal{E}$ にクリフォード作用 $1 \otimes c(a)$ を与えたものを，**係数つきクリフォード加群**（twisted Clifford module）とよぶ．

もっともわかりやすい例としてつぎのものをあげよう．

■ **例 6.1** ■　（ドラーム複体）$\mathcal{E} = \Lambda T^*M$ とおけば

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-, \quad \mathcal{E}^+ = \Lambda^+ T^*M\ ,\ \mathcal{E}^- = \Lambda^- T^*M \tag{6.34}$$

である．$\alpha \in \Gamma(M, T^*M)$ への $\beta \in \Gamma(M, T^*M)$ の作用を

$$c(\alpha)\beta = (\alpha \wedge \beta) - \iota(\alpha)\beta \tag{6.35}$$

で定義すれば，これは $C(M)$ の $\mathcal{E}$ への $\mathbf{Z}_2$ 階数づけられた作用に拡張し $\mathcal{E}$ はクリフォード加群となる．

クリフォード加群は，超バンドル $\mathcal{E} = \mathcal{E}^+ \oplus \mathcal{E}^-$ として実超バンドルを考えるか，複素超バンドルを考えるかに従って，実または複素クリフォード加群の区別がつくが，実クリフォード加群は複素化しておいて，必要に応じて実部分に制限して考えれば良いので，以下ことわらない限りクリフォード加群は複素クリフォード加群

の意味で用いることにする．

定義からわかるように，クリフォード加群$\mathcal{E}$の各ファイバー$\mathcal{E}_x$は，クリフォード代数$C(T_x^*M)$の複素表現空間になっている．連続性からこの表現の同型類は点xによらない．

とくに偶数次元の多様体の場合は，命題5.37により，任意のクリフォード加群$\mathcal{E}$のファイバー$\mathcal{E}_x$は，$C(T_x^*M)$複素表現空間として

$$W_x \otimes S_x \tag{6.36}$$

と書くことができる．ここにW_xは自明なクリフォード表現であり，S_xはスピノル表現である．

さらに局所的にはMの余接バンドルの正規直交基底を選ぶことにより，$C(M)$を自明化することができる．このような開集合の上では$C(M) \cong U \times C(\mathbf{R}^n)$となり，

$$\mathcal{E}|_U = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S} \tag{6.37}$$

と分解することができる．ただし，$\mathcal{W}$と$\mathcal{S}$はそれぞれ自明なクリフォード表現空間W_xとスピノル表現S_xをU上に並べてできるバンドルである．

6.3　スピン多様体とスピノルバンドル

前節の最後に述べたことから，理論上もっとも基本的なクリフォード加群は，M全体にスピノル表現S_xを並べてできるバンドル$\mathcal{S}$ということになるであろう．このようなものを**スピノルバンドル**（spinor bundle）とよぶ．

ところがM全体にスピノル表現S_xを矛盾なく並べることは，一般に不可能であり，スピノルバンドルの構成には位相幾何学的な**障害**（obstruction）が現れる．したがって(6.37)のような分解も一般にM全体ではできない．このことをもう少しはっきりさせてみよう．

かりに，向きづけられた多様体M全体にスピノル表現S_xを並べてスピノルバンドル$\mathcal{S}$ができたとしてみる．各点$x \in M$でスピノル群$Spin(n)_x \subset C^+(T_x^*M)$は，$S_x$のノルムを保つ自己同型の全体のなす群の連結成分である．このことから，M上の$Spin(n)$主バンドルPを構成して，$\mathcal{S} = P \times_\rho S$と表すことができる．ただし，$\rho$はスピノル表現である．

一方加群としての同型

$$\Lambda T_x^* M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong C(T_x^* M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong End(S_x) \cong S_x^* \otimes S_x \tag{6.38}$$

があり，したがって M 全体で

$$\Lambda T^* M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong C(T^* M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong End(S) \cong S^* \otimes S \tag{6.39}$$

となる．$S_x^* \otimes S_x$上に $Spin(n)$ の**随伴表現**（adjoint representation）を考える．この表現は，$SO(n)$ の T^*M への通常の作用を，(5.73) の 2 重被覆写像 $\tau : Spin(n) \to SO(n)$ によって $Spin(n)$ の T^*Mへの作用と見なしたものを誘導する．このことと上に述べたことを合わせれば，バンドル写像

$$P \longrightarrow SO(M) \tag{6.40}$$

であって，各ファイバー上射影 $\tau : Spin(n) \to SO(n)$ に一致するものが得られる．

逆に (6.41) のような $Spin(n)$ 主バンドル P が M上に構成できれば，$\mathcal{S} = P \times_\rho S$ とおいて，M全体でスピノルバンドル $\mathcal{S}$ がつくれたことになる．

以上のことからスピノルバンドルを M 全体で構成できるための必要十分条件は

- Mの向きづけられた枠バンドル $SO(M)$ の張り合わせ写像が $Spin(n)$ へ持ち上げられて，$SO(M)$ の**持ち上げ**（lift）となっているような M上の $Spin(n)$ 主バンドルがある

となることがわかった．

もし $SO(M)$ が自明なバンドル $M \times SO(n)$ ならばこれは可能である．局所的に考えれば $SO(M)$ はつねに自明にできるので，局所的には $Spin(n)$ 主バンドルへの持ち上げは可能なのだが，全体にうまく張り合わせができるためには位相幾何学的な障害が現れる．さらにこれが可能な場合でも一般に持ち上げは一意的ではない．

こうしてわれわれは多様体のスピン構造なるものに巡り会う．

【定義 6.10】　向きづけられた多様体 Mの**スピン構造**（spin structure）とは，M上の $Spin(n)$ 主バンドル $Spin(M)$ で，Mの余接バンドルが $Spin(M) \times_{Spin(n)} \mathbf{R}^n$

と同型になるものをいう．ここに $Spin(n)$ は $\tau : Spin(n) \to SO(n)$ によって $\mathbf{R}^n$ に作用するものとする．

とくにスピン構造 $Spin(M)$ をもつ多様体は向きづけられたリーマン多様体で，その枠バンドルは

$$SO(M) = Spin(M) \times_{Spin(n)} SO(n) \tag{6.41}$$

で与えられる．

【定義 6.11】 向きづけられた多様体 M がスピン構造 $Spin(M)$ をもつとする．$Spin(n)$ は $SO(n)$ の 2 重被覆であるから，これらのリー群は同じリー環をもつ．したがって $SO(M)$ のレビ–チビタ接続は自然に $Spin(M)$ の接続に持ち上がる．これを $Spin(M)$ の**レビ–チビタ接続**（Levi-Civita connection）とよぶ．

多様体がスピン構造をもつための位相的な条件を調べよう．以下 M の開被覆 $\{U_i\}$ を

- 各 U_i と各 $U_i \cap U_j$ $(U_i \cap U_j \neq \emptyset)$ が**可縮**（contractible）である

を満たすようにとり，これを固定する．

多様体 M 上の構造群 G をもつ主バンドル P に対し，各 U_i での局所自明化 $P|_{U_i} \cong U_i \times G$ を選んで P の張り合わせ写像

$$g_{ij} : U_i \cap U_j \longrightarrow G \qquad U_i \cap U_j \neq \emptyset \tag{6.42}$$

が定義される．$\{g_{ij}\}$ は各 $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ に対し

$$g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1 \tag{6.43}$$

を満たし，G 係数 1 次元**チェックコホモロジー群**（Čhec cohomology group）$H^1(M, G)$ の元 $[g_{ij}]$ を定める．よく知られているように，対応

$$P \longrightarrow [g_{ij}] \in H^1(M, G) \tag{6.44}$$

によって，P の G 主バンドルとしての同型類は，G 係数 1 次元チェックコホモロジー群 $H^1(M,G)$ の元と，1 対 1 に対応する．

Mの向きづけられた枠バンドル $SO(M)$ は $SO(n)$ 主バンドルであるが，その同型類に対応する $H^1(M,SO(n))$ の元を，$\alpha \in H^1(M,SO(n))$ としよう．α は $SO(M)$ の局所自明化，$SO(M)|_{U_i} = SO(n)\times U_i$，から定まる張り合わせ写像 $g_{ij} \in SO(n)$ の定めるチェックコホモロジー類 $[g_{ij}] \in H^1(M,SO(n))$ である．

さてリー群の短完全系列

$$1 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow Spin(n) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow 1 \tag{6.45}$$

を考えよう．この完全系列に付随して**ボクスタイン完全系列**（Bockstein exact sequence）とよばれるチェックコホモロジー群の完全系列

$$0 \longrightarrow H^1(M,\mathbf{Z}_2) \longrightarrow H^1(M,Spin(n)) \longrightarrow H^1(M,SO(n)) \longrightarrow H^2(M,\mathbf{Z}_2) \tag{6.46}$$

がある．

(6.46) において，最後の写像以外は，上に述べた被覆 $\{U_i\}$ によってチェックコホモロジー群の元を $\{g_{ij}\}$ のかたちのコサイクルで表し，各 g_{ij} に上の完全系列 (6.46) の写像をほどこして得られる．(6.46) の最後の写像はボクスタイン（Bockstein）準同型写像とよばれるものであるが，以下に述べることで自然にわかる．

多様体 Mがスピン構造をもつための必要十分条件は，$\alpha \in H^1(M,SO(n))$ が完全系列 (6.46) の中央の写像の像にはいっていることである．これを被覆 $\{U_i\}$ に関するコサイクルの存在条件として導きだそう．

$Spin(n) \to SO(n)$ が被覆写像であることを用いれば，$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ のときつねに $U_i \cap U_j$ が可縮であることから，微分可能写像 $\tilde{g}_{ij} : U_i \cap U_j \to Spin(n)$ で

$$\tau(\tilde{g}_{ij}) = g_{ij} \tag{6.47}$$

を満たすものが存在する．各 $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ でこのような $\tilde{g}_{ij}$は 2 つあり，そのうちのひとつを任意に選ぶ．

$Spin(M)$ を $Spin(n) \times U_i$ たちを $\tilde{g}_{ij} \in Spin(n)$ で張り合わせて構成したいのだが，そのためにはバンドルを定義するための両立条件として，各 $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ に対し

$$\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki} = 1 \tag{6.48}$$

が満たされなければならない．

各 $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ で

$$\tau(\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki}) = g_{ij}g_{jk}g_{ki} = 1 \tag{6.49}$$

であるから

$$\varepsilon_{ijk} = \tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki} = \pm 1 \in Spin(n) \tag{6.50}$$

となり

$$U_i \cap U_j \cap U_k \longrightarrow \varepsilon_{ijk} \qquad (U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset) \tag{6.51}$$

という M の $\mathbf{Z}_2$ 係数2次元チェックコサイクルが得られる．

【定義 6.12】 (6.51) の ε_{ijk} が定める2次元チェックコホモロジー類を，

$$w_2(M) = [\varepsilon_{ijk}] \in H^2(M, \mathbf{Z}_2) \tag{6.52}$$

と書き，M の**第2スティーフェル・ホイットニー類**（second Stiefel-Whitney class）$w_2(M)$ とよぶ．

問　(6.52) のコホモロジー類 $[\varepsilon_{ijk}]$ が被覆 $\{U_i\}$ およびバンドルの局所自明化のとり方によらないことを証明せよ．

$w_2(M)$ がコバウンダリーならば，つまり $w_2(M) = 0$ ならば，$\tilde{g}_{ij}$ を適当に選んだ $\varepsilon_{ij} = \pm 1$ により $\varepsilon_{ij}\tilde{g}_{ij}$ に取り替えて，(6.49) が満たされるようにできる．結局 $w_2(M)$ が $Spin(M)$ を構成するための障害を表す．

写像 $\alpha \to w_2(M)$ がボクスタイン完全系列 (6.47) の最後の写像を α にほどこしたものである．

また (6.48), (6.49) を満たす $\tilde{g}_{ij} : U_i \cap U_j \to Spin(n)$ と，M の $\mathbf{Z}_2$ 係数1次元チェックコサイクル $\varepsilon_{ij} : U_i \cap U_j \to \pm 1$ に対し，$\varepsilon_{ij}\tilde{g}_{ij}$ も (6.48), (6.49) を満たす．そして $\tilde{g}_{ij}$ と $\varepsilon_{ij}\tilde{g}_{ij}$ が同型なスピンバンドルを定めるための必要十分条件は ε_{ij} のコホモロジー類 $[\varepsilon_{ij}] \in H^1(M, \mathbf{Z}_2)$ が0であることである．

以上によりつぎのことがわかった．

【定理 6.13】 向きづけ可能な多様体 M は第 2 スティーフェル・ホイットニー類 $w_2(M) \in H^2(M, \mathbf{Z}_2)$ が消えるとき，またそのときに限りスピン構造をもつ．

M がスピン構造をもつとき，M の異なるスピン構造は

$$H^1(M, \mathbf{Z}_2) \cong Hom(\pi_1(M), \mathbf{Z}_2)$$

の元と 1 対 1 に対応する．

■ **例 6.2** ■ (1) 種数 g の向きづけ可能な閉曲面 M は $H^1(M, \mathbf{Z}_2) \cong (\mathbf{Z}_2)^{2g}$ であり，2^{2g} 個の異なるスピン構造をもつ．

(2) 複素射影空間 $\mathbf{CP}^n$ については

$$w_2(T\mathbf{CP}^n) = c_1(T\mathbf{CP}^n) \ (mod.2)$$

であり，したがって，3.6 節の計算により $x = c_1(\mathcal{L}^*)$ とおけば，$w_2(T\mathbf{CP}^n) = (n+1)x \ (mod.2)$ である．ただし $\mathcal{L}^*$ は 3.6 節で定義した直線バンドルである．

ゆえに $\mathbf{CP}^{2k}$ はスピン構造をもたない．$H^1(\mathbf{CP}^n, \mathbf{Z}_2) = 0$ から $\mathbf{CP}^{2k+1}$ はただ 1 つのスピン構造をもつ．

さてつぎに定義するものがもっとも基本的なクリフォード加群である．

【定義 6.14】 M がスピン構造 $Spin(M)$ をもつ偶数次元スピン多様体であるとき，スピノルバンドル $\mathcal{S}$ が

$$\mathcal{S} = Spin(M) \times_{Spin(n)} S \tag{6.53}$$

として定義される．$\mathcal{S}$ 上の $C(\mathbf{R}^n)$ 作用は $C(M) = Spin(M) \times_{Spin(n)} C(\mathbf{R}^n)$ の $\mathcal{S}$ への作用を導くので，$\mathcal{S}$ はクリフォード加群である．

【命題 6.15】 M が偶数次元スピン多様体ならば，すべての複素クリフォード加群 $\mathcal{E}$ は係数つき加群 $\mathcal{E} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ である．

証明 $\mathcal{W} = End_{C(M)}(\mathcal{S}, \mathcal{E})$ とおくと，$\mathcal{W}$ は M 上の複素超ベクトルバンドルであり，写像 $w \otimes s \to w(s)$ が $\mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ から $\mathcal{E}$ への同型を与える． ■

以前に述べたように，スピノルバンドル$\mathcal{S}$は局所的にはつねに存在し，$\mathcal{E} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$と分解することができるが，このことは後によく用いられるので注意されたい．

6.3.1　$Spin^c$ 構造

スピン構造よりややゆるい条件で，多様体上にスピノル表現空間を複素直線バンドルでねじったバンドルを構成することができる．

スピノル表現Sは複素表現であるから，0でない複素数の集合$\mathbf{C}^*$のスカラー倍による作用があり，これは明らかにスピノル群の作用と可換である．したがってSは直積リー群$Spin(n) \times \mathbf{C}^*$の作用をもつが，$Spin(n)$の中心$\pm 1 \in Spin(n)$と$\pm 1 \in \mathbf{C}^*$は，ともに$\pm 1$によるスカラー倍の作用になるので，$(\epsilon, \epsilon) \in Spin(n) \times \mathbf{C}^*$ $(\epsilon = \pm 1)$の作用は自明になる．

【定義 6.16】　リー群$Spin^c(n) = Spin(n) \times_{\mathbf{Z}_2} \mathbf{C}^*$を$Spin(n) \times \mathbf{C}^*$の商群

$$Spin^c(n) = Spin(n) \times \mathbf{C}^* / \{(\epsilon, \epsilon),\ \epsilon = \pm 1\} \tag{6.54}$$

として定義する．

$Spin^c(n)$の元を$[\tilde{g}, \lambda]$ $(\tilde{g} \in Spin(n), \lambda \in \mathbf{C}^*)$と表す．$Spin^c(n)$から$SO(n)$および$\mathbf{C}^*$への準同型写像を

$$\tilde{\tau}_1 : Spin^c(n) \ni [\tilde{g}, \lambda] \longrightarrow \tau(\tilde{g}) \in SO(n) \tag{6.55}$$

$$\tilde{\tau}_2 : Spin^c(n) \ni [\tilde{g}, \lambda] \longrightarrow \lambda \in \mathbf{C}^* \tag{6.56}$$

で定義する．リー群の2つの短完全系列

$$1 \longrightarrow \mathbf{C}^* \longrightarrow Spin^c(n) \longrightarrow SO(n) \longrightarrow 1 \tag{6.57}$$

$$1 \longrightarrow Spin(n) \longrightarrow Spin^c(n) \longrightarrow \mathbf{C}^* \longrightarrow 1 \tag{6.58}$$

がある．

【定義 6.17】　向きづけられたn次元リーマン多様体Mの**$Spin^c$ 構造**（$Spin^c$ structure）$Spin^c(M)$とは，M上の$Spin^c(n)$主バンドル$Spin^c(M) \to M$で，

Mの余接バンドルが $Spin^c(M) \times_{Spin^c(n)} \mathbf{R}^n$ と同型になるものである．ただし，$Spin^c(n)$ は $\mathbf{R}^n$ に (6.56) の $\tilde{\tau}_1$ で作用するものとする．

【定理 6.18】 向きづけられた多様体 M が $Spin^c$ 構造をもつための必要十分条件は，ある整係数コホモロジー類 $\alpha \in H^2(M, \mathbf{Z})$ があって

$$w_2(M) = \alpha \quad mod.2 \tag{6.59}$$

となることである．

M が $Spin^c$ 構造をもつとき M の相異なる $Spin^c$ 構造の集合は，集合 $\{2\beta \in H^2(M, \mathbf{Z})\}$ と 1 対 1 に対応する．

証明 必要条件であること．Mの $Spin^c$ 構造 $Spin^c(M)$ があったとする．(6.57) の写像 $\tilde{\tau}_2$ によって，$\mathbf{C}$ を $Spin^c(n)$ 加群と見なし，複素直線バンドル $\mathcal{L} = Spin^c(M) \times_{Spin^c(n)} \mathbf{C}$ を構成する．これを $Spin^c(M)$ の行列式直線バンドルとよぶ．$\alpha = c_1(\mathcal{L})$ を $\mathcal{L}$ の第 1 チャーン類とする．

局所自明化により，Mの開被覆 U_i をとって $Spin^c(M)$ の張り合わせ写像を $\{[\tilde{g}_{ij}, \lambda_{ij}]\}$ で表せば，$Spin^c(n)$ の定義から各 $U_i \cap U_j \cap U_k \neq \emptyset$ で

$$\tilde{g}_{ij}\tilde{g}_{jk}\tilde{g}_{ki} = \lambda_{ij}\lambda_{jk}\lambda_{ki} \tag{6.60}$$

が成り立つ．この共通の値を $\epsilon_{ijk} \in \mathbf{Z}_2$ で表せば，定義から 2 次元チェックコサイクル $\{U_i \cap U_j \cap U_k \to \epsilon_{ijk}\}$ が，$w_2(M)$ および $\alpha\, mod.2$ を同時に表すコサイクルとなり，したがって (6.60) が成り立つ．

十分条件であること．(6.60) を満たす $\alpha \in H^1(M, \mathbf{Z})$ に対し，M上の複素直線バンドル $\mathcal{L}$ で $c_1(\mathcal{L}) = \alpha$ となるものが構成できる．条件 (6.60) から，開被覆 U_i をとって TM と $\mathcal{L}$ を同時に自明化し，それぞれの張り合わせ写像 $\{\tilde{g}_{ij}\}$ と $\{\lambda_{ij}\}$ を (6.61) が満たされるように選ぶことができる．このとき張り合わせ写像 $\{[\tilde{g}_{ij}, \lambda_{ij}]\}$ により $Spin^c(n)$ 主バンドルを構成すれば，これが Mの $Spin^c$ 構造を与える．

定理の後半の証明は読者の演習問題とする． ■

M上の複素直線バンドル $\mathcal{L}$ に対し，$\mathcal{F}^2 \cong \mathcal{L}$ を満たす複素直線バンドル $\mathcal{F}$ を $\mathcal{L}^{1/2}$ と書く．定理 6.18 の証明でわかるように，$c_1(M) = 0\, mod.2$ は $\mathcal{L}$ に対し $\mathcal{L}^{1/2}$ が存

在するための必要十分条件である．

したがって $w_2(M) = c_1(\mathcal{L})\, mod.2$ を満たす複素直線バンドル $\mathcal{L}$ に対して，$\mathcal{L}^{1/2}$ が存在するための条件と M 上のスピノルバンドル $\mathcal{S}$ が存在するための条件が，同じ $\mathbf{Z}_2$ 係数コホモロジー類で表されることになる．このことから $\mathcal{S}$，$\mathcal{L}^{1/2}$ のそれぞれが単独で存在しなくても，$\mathcal{S} \otimes \mathcal{L}^{1/2}$ なるバンドルを構成することはでき，このバンドルが M の $Spin^c$ 構造を与えることは理解されるであろう．

■ **例 6.3** ■　複素多様体 M に対しては，$\alpha = c_1(T^*M)$ とすれば

$$w_2(M) = \alpha \quad mod.2 \tag{6.61}$$

となる．したがってすべての複素多様体は $Spin^c$ 構造をもつ．とくに例 6.2(2) の $\mathbf{CP}^{2k}$ は，スピン構造はもたないが $Spin^c$ 構造はもつ．

ディラック作用素に関する事柄については，スピン多様体上で構成できることは，$Spin^c$ 多様体でもほぼ平行して構成できる．

6.4　ディラック作用素

$a \in \Omega(M, C(M))$ が M 上のクリフォード代数値微分形式のとき，$\Omega(M, \mathcal{E})$ に作用する作用素 $c(a)$ をつぎの式によって定義する．α, β を M の微分形式とし，$\mathbf{Z}_2$ 階数づけに関して斉次のすべてのクリフォード切断 α, $\mathcal{E}$ の切断 s に対し，

$$(c(\alpha \otimes a))(\beta \otimes s) = (-1)^{|\alpha||\beta|}(\alpha \wedge \beta) \otimes (c(a)s) \tag{6.62}$$

【定義 6.19】　クリフォード加群 $\mathcal{E}$ の接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ が**クリフォード接続**（Clifford connection）であるとは，すべての $a \in \Gamma(M, C(M))$ と $X \in \Gamma(M, TM)$ に対し，

$$[\nabla^{\mathcal{E}}_X, c(a)] = c(\nabla_X a) \tag{6.63}$$

が成り立つことである．

【定義 6.20】　（ディラック作用素）クリフォード接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ をもつクリフォード加群 $\mathcal{E}$ の上の**ディラック作用素**（Dirac operator）D を

$$\Gamma(M,\mathcal{E}) \xrightarrow{\nabla^{\mathcal{E}}} \Gamma(M,T^*M\otimes\mathcal{E}) \xrightarrow{c} \Gamma(M,\mathcal{E}) \tag{6.64}$$

で定義する．

局所座標ではこれは

$$D = \sum_i c(dx_i)\nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_i} \tag{6.65}$$

と書かれる．接バンドル TM の開集合 U 上での正規直交基底 e_i とその双対基底 e^i を用いて，

$$D = \sum_i c(e^i)\nabla^{\mathcal{E}}_{e_i} \tag{6.66}$$

とも表せる．

【命題 6.21】 T^*M の $\mathcal{E}$ への作用

$$[D,f] = c(df) \tag{6.67}$$

はクリフォード作用であり，D が対称ならば $\mathcal{E}$ の計量に関して自己共役である．逆にすべての $f\in C^\infty(M)$ に対し $[D,f]=c(df)$ を満たす微分作用素はディラック作用素である．

証明 f と h が M 上のなめらかな関数ならば

$$c(d(fh)) = [D,fh] = fc(dh) + hc(df) \tag{6.68}$$

が成り立つ．

$$c(df)^2 = \frac{1}{2}[[D,f],[D,f]] = \frac{1}{2}[[D^2,f],f] = -|df|^2 \tag{6.69}$$

■

スピン多様体のスピノルバンドル $\mathcal{S}$ のレビ–チビタ接続 $\nabla^{\mathcal{S}}$ は，クリフォード接続である．ω^k_{ij} をレビ–チビタ接続の，接ベクトルバンドルの正規直交枠 e_i に関する係数；$\nabla_{\partial_i}e_j = \omega^k_{ij}e_k$，とすれば $\nabla^{\mathcal{S}}$ は局所座標により

$$\nabla^{\mathcal{S}}_{\partial_i} = \partial_i + \frac{1}{4}\sum_{jk} \omega^k_{ij} c(e^j)c(e^k) \tag{6.70}$$

で与えられる．

【命題 6.22】 Mをスピン多様体，$\mathcal{E} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ を係数つきスピノルバンドルとすれば，

(1) $\nabla^{\mathcal{W}}$が超バンドル W上の接続ならば，係数つきクリフォード加群 $\mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ 上のテンソル積接続 $\nabla = \nabla^{\mathcal{W}} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\mathcal{S}}$はクリフォード接続である．$\nabla^{\mathcal{W}}$をクリフォード接続 ∇ に付随した**係数接続**（twisting connection）とよび，$\nabla^{\mathcal{E}/S}$で表す．

(2) 対応 $\nabla^{\mathcal{W}} \to (\nabla^{\mathcal{W}} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\mathcal{S}})$ は $\mathcal{W}$ 上の接続と係数つきクリフォード加群 $\mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ 上のクリフォード接続との間の1対1対応を与える．

【系 6.23】 任意のクリフォード加群 $\mathcal{E}$ 上にクリフォード接続が存在する．

つぎの命題は，クリフォード接続の曲率の分解を与えるもので，きわめて重要である．

【命題 6.24】 ∇ が $\mathcal{E}$上のクリフォード接続ならば，∇ の曲率 $\nabla^2 \in \Omega(M, End(\mathcal{E}))$ は同型

$$End(\mathcal{E}) \cong C(M) \otimes End_{C(M)}(\mathcal{E}) \tag{6.71}$$

のもとで

$$\nabla^2 = R^{\mathcal{E}} + F^{\mathcal{E}/S} \tag{6.72}$$

と分解する．ここに $R^{\mathcal{E}} \in \Omega^2(M, C(M)) \subset \Omega^2(M, End(\mathcal{E}))$ は，Mのリーマン曲率 R のバンドル $\mathcal{E}$ への

$$R^{\mathcal{E}}(e_i, e_j) = \frac{1}{4}\sum_{kl} (R(e_i, e_j)e_k, e_l) c(e^k)c(e^l) \tag{6.73}$$

で与えられる作用を表し，$F^{\mathcal{E}/S} \in \Omega(M, End_{C(M)}(\mathcal{E}))$ はクリフォード加群 $\mathcal{E}$

の**係数曲率**（twisting curvature）とよばれる ∇ の不変量である．

証明 まず

$$F^{\mathcal{E}/S} = \nabla^2 - R^{\mathcal{E}} \tag{6.74}$$

とおいて $F^{\mathcal{E}/S}$ を定義する．∇ はクリフォード作用と両立するので $a \in \Gamma(M, T^*M) \subset \Gamma(M, C(M))$ に対し

$$[\nabla^2, c(a)] = [\nabla, [\nabla, c(a)]] = [\nabla, c(\nabla a)] = c(\nabla^2 a) \tag{6.75}$$

が成り立つ．R を M のリーマン曲率とすれば $\nabla^2 a = Ra$ で，$[R^{\mathcal{E}}, c(a)] = c(Ra)$ であるから

$$[\nabla^2, c(a)] = c(Ra) = [R^{\mathcal{E}}, c(a)] \tag{6.76}$$

となる．つまり

$$[F^{\mathcal{E}/S}, c(a)] = [\nabla^2 - R^{\mathcal{E}}, c(a)] = 0 \tag{6.77}$$

が得られ，$F^{\mathcal{E}/S}$ の $\Omega(M, \mathcal{E})$ への外積による作用は，$c(\alpha)$ と可換である．したがって $F^{\mathcal{E}/S}$ は $End_{C(M)}(\mathcal{E})$ に値をもつ微分形式である． ■

M をスピン多様体，$\mathcal{E} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ を係数つきスピノルバンドルとする．$\nabla^{\mathcal{W}}$ が超バンドル $\mathcal{W}$ 上の接続でその曲率を $F^{\mathcal{W}}$ とすれば，対応する $\mathcal{E} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ 上の係数つき接続 $\nabla = \nabla^{\mathcal{W}} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\mathcal{S}}$ の曲率は

$$\nabla^2 = R^{\mathcal{E}} + F^{\mathcal{W}} \tag{6.78}$$

である．このように ∇ の係数曲率 $F^{\mathcal{E}/S}$ は，係数接続 $\nabla^{\mathcal{W}}$ の曲率 $F^{\mathcal{W}}$ に等しい．

ディラック作用素の**形式的共役**（formal adjoint）を考えよう．エルミートベクトルバンドル上の接続 ∇ の共役 ∇^* は，すべての $s_i \in \Gamma(M, \mathcal{E})$ に対する 1 形式の等式

$$d(s_1, s_2) = (\nabla s_1, s_2) + (s_1, \nabla^* s_2) \tag{6.79}$$

によって定義される．

【命題 6.25】 接続 ∇ に対応するディラック作用素 D_∇ の形式的共役は，共役接続 ∇^* に対応するディラック作用素 D_{∇^*} である．

証明　s_1,s_2を$\mathcal{E}$の2つの切断とする．Xを，$\alpha \in \Omega^1(M)$に対し$\alpha(X) = (s_1, c(\alpha)s_2)$で与えられる$M$上のベクトル場とする．$\nabla X \in \Gamma(M, TM \otimes T^*M)$である．

$$(D_\nabla s_1, s_2)_x = (s_1, D_{\nabla^*} s_2)_x - Tr(\nabla X)_x \tag{6.80}$$

であるが，右辺の第2項の積分は命題4.9により消えるので，命題が得られる．■

6.5　リヒネロウィッツの公式

∇をクリフォード接続，Dを対応するディラック作用素とするとき，D^2を表す公式がある．

【定理 6.26】（**リヒネロウィッツ公式**（Lichnerowicz formula））∇をクリフォード加群$\mathcal{E}$上のクリフォード接続とする．接続∇に関するラプラス作用素をΔで表す．r_MをMの**スカラー曲率**（scalar curvature）とするとき，

$$D^2 = \Delta + c(F^{\mathcal{E}/S}) + \frac{r_M}{4} \tag{6.81}$$

が成り立つ．ここに$F^{\mathcal{E}/S} \in \Omega^2(M, End_{C(M)}(\mathcal{E}))$は命題6.24で定義されたクリフォード接続の係数曲率であり，

$$c(F^{\mathcal{E}/S}) = \sum_{i<j} F^{\mathcal{E}/S}(e_i, e_j) c(e^i) c(e^j) \tag{6.82}$$

である．

証明　多様体Mの座標近傍系を1つ選ぶ．局所座標でディラック作用素を$D_\nabla = \sum c(dx_i)\nabla_i$と表す．ただし，$\nabla_i$は$\partial/\partial x_i$方向の共変微分である．これを2乗して

$$\begin{aligned}
D^2 &= \frac{1}{2}\sum_{ij}[c(dx_i)\nabla_i, c(dx_j)\nabla_j] \\
&= \frac{1}{2}\sum_{ij}[c(dx_i), c(dx_j)]\nabla_i\nabla_j + \sum_{ij} c(dx_i)\,[\nabla_i, c(dx_j)]\nabla_j \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{ij} c(dx_i)c(dx_j)\,[\nabla_i, \nabla_j]
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{ij} g^{ij}\left(\nabla_i\nabla_j + \sum_k \Gamma_{ij}^k \nabla_k\right) + \sum_{i<j} c(dx_i)c(dx_j)\left[\nabla_i, \nabla_j\right] \quad (6.83)$$

この計算において，∇ は M のレビ–チビタ接続，Γ_{ij}^k は枠 ∂_i に関するその係数で $\nabla_i dx_j = -\Gamma_{ik}^j dx_k$ を満たす．ここで接続 ∇ とクリフォード作用の両立性

$$[\nabla_i, c(dx_j)] = c(\nabla_i dx_j) = -\Gamma_{ik}^j c(dx_k) \quad (6.84)$$

と，$\nabla_i\partial_k = \nabla_k\partial_i$ からでる対称性 $\Gamma_{ik}^j = \Gamma_{ki}^j$ を用いて

$$\sum_{ik} \Gamma_{ik}^j c(dx_i)c(dx_k) = \frac{1}{2}\sum_{ik} \Gamma_{ik}^j \left[c(dx_i), c(dx_k)\right] \quad (6.85)$$

が導かれることを使った．

∇^2 を接続 ∇ の曲率テンソル，$e_i (1 \le i \le n)$ を TM の正規直交枠とする．上の計算により，

$$\begin{aligned} D^2 &= \Delta + \sum_{ij} c(dx_i)c(dx_j)\left[\nabla_i, \nabla_j\right] \\ &= \Delta + \sum_{i<j} c(e^i)c(e^j)\nabla^2(e_i, e_j) \end{aligned} \quad (6.86)$$

が得られる．命題 6.24 から R_{ijkl} を M のリーマン曲率の成分とすれば

$$\sum_{i<j} c(e^i)c(e^j)\nabla^2(e_i, e_j) = -\frac{1}{8}\sum_{ijkl} R_{klij}c(e^i)c(e^j)c(e^k)c(e^l) + c(F^{\mathcal{E}/S}) \quad (6.87)$$

となる．$c(e^i)c(e^j)c(e^k)$ は

$$\frac{1}{6}\sum_{\sigma\in S_3} sgn(\sigma)c(e^{\sigma(i)})c(e^{\sigma(j)})c(e^{\sigma(k)}) - \delta_{ij}c(e^k) - \delta_{jk}c(e^i) + \delta_{ki}c(e^j) \quad (6.88)$$

に等しいことに注意する．R_{klij} の ijk にわたる反対称化が消えることを用いて，

$$\sum_{ijkl} R_{klij}c(e^i)c(e^j)c(e^k)c(e^l) = -\sum_{ijl} c(e^i)c(e^l)R_{jlij} + \sum_{ijl} c(e^j)c(e^l)R_{ilij} \quad (6.89)$$

が得られる．さらに

$$\sum_{ijkl} R_{klij}c(e^i)c(e^j)c(e^k)c(e^l) = 2\sum_{ij} c(e^j)c(e^i)\sum_k R_{ikjk} \quad (6.90)$$

である．一方 $R_{ikjk} = R_{jkik}$だから $\sum_{ij} c(e^j)c(e^i)R_{ikjk} = -\sum_i R_{ikik}$である．ゆえに右辺は $-2r_M$に等しくリヒネロウィッツ公式が得られる．■

リヒネロウィッツ公式は D^2 が4.2節で定義した一般化ラプラシアンであることを示している．

6.6　ディラック作用素の指数

$\mathcal{E}$ を超ベクトルバンドルとする．$D:\Gamma(M,\mathcal{E}) \to \Gamma(M,\mathcal{E})$ を自己共役ディラック作用素とし，D の $\mathcal{E}^{\pm}$ への制限を $D^{\pm}$と書く．

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \tag{6.91}$$

かつ $D^- = (D^+)^*$である．

【定義 6.27】 ディラック作用素 D の指数 $ind(D)$ とは

$$\begin{aligned} ind(D) &= \dim\ ker\, D^+ - \dim ker\, D^- \\ &= \dim\ ker\, D^+ - \dim coker D^+ \end{aligned} \tag{6.92}$$

で定義される整数である．

上の指数の定義に関してつぎの注意を与える．

一般に微分作用素を関数解析学的に扱うためには作用素の定義域をなめらかな関数の空間だけにとどめておくわけにはいかず，何らかのかたちで完備化して作用素を拡張しなければならない．異なる完備化を採用すれば，異なる定義域が得られその際作用素としては異なるものを考えていると見なされる．

したがってディラック作用素についてもその定義域をどの完備化をとるのかきちんと指定してかからなければならず，正確には指数もその上で定義されなければならない．しかし第4章系4.38で述べた楕円正則性（とそのすぐ後の注意）をラプラシアン D^+D^-と D^-D^+に適用して，ディラック作用素の指数が作用素の定義域として採用する完備化によらず，(6.92) で与えられることがただちに導かれる．

【命題 6.28】 $u = \begin{pmatrix} 0 & u^- \\ u^+ & 0 \end{pmatrix}$ を超空間の自己随伴奇準同型写像とする. $coker(u^+) = E^-/Im(u^+)$ とおくと, $coker(u^+) \cong ker(u^-)^*$.

証明　u^-はu^+の随伴作用素であるから, すべての $e \in E^+, f \in E^-$ に対し

$$\langle u^+e, f\rangle = \langle e, u^-f\rangle \tag{6.93}$$

が成り立つ. ゆえに $f \in ker(u^-)$ は, すべての $e \in E^+$ に対し $\langle u^+e, f\rangle = 0$ が成り立つことと同値である. ■

第 4 章の熱核の理論を適用しよう.

【定理 6.29】 (**マッキーン・シンガー** (Mckean-Singer) **の定理**) $e^{-tD^-D^+}, e^{-tD^+D^-}$ を熱核とすれば

$$\begin{aligned} ind(D) &= Str(e^{-tD^2}) \\ &= Tr(e^{-tD^-D^+}) - Tr(e^{-tD^+D^-}) \end{aligned} \tag{6.94}$$

が成り立つ.

証明　実数 λ に対し, $H_\lambda^\pm$ D^-D^+, D^+D^-の λ 固有空間とし $n_\lambda^\pm = \dim H_\lambda^\pm$とすれば

$$Tr(e^{-tD^-D^+}) - Tr(e^{-tD^+D^-}) = \sum_{\lambda \geq 0} (n_\lambda^+ - n_\lambda^-)e^{-t\lambda} \tag{6.95}$$

$\lambda \neq 0$ のとき

$$H_\lambda^+ \xrightarrow{D^+} H_\lambda^- \xrightarrow{\lambda^{-1}D^-} H_\lambda^+ \tag{6.96}$$

は恒等写像となり, $n_\lambda^+ - n_\lambda^- = 0$ で上式の右辺は $n_0^+ - n_0^-$となる. これは $ind(D)$ に等しい. ■

ディラック作用素の微分可能な 1 パラメーター族 $\{D_s\}_{s\in\mathbf{R}}$に対し, 第 7 章で証明される指数定理から $ind\,D_s$は s によらない.

しかしこのことはもう少し直接的にもわかる. 本書では証明を割愛するが第 4 章での熱核の構成から, $\{D_s\}$ に付随する熱核の 1 パラメーター族 $\{e^{-t(D_s)^2}\}$ は

（トレースクラス作用素の族として）s に関して微分可能になることがわかる．したがってマッキーン・シンガーの公式からその指数 $ind\,D_s$ は s の微分可能な関数となる．しかし指数は整数なので s に独立な定数でなければならない．

【定理 6.30】 指数は多様体 M とクリフォード加群 $\mathcal{E}$ の不変量である．

7

局所指数定理

局所指数定理の証明を行う．証明の中核となるのは熱核の漸近展開に対するスケール変換の考え方である．熱核の漸近展開の各項は，リーマン多様体およびベクトルバンドルの接続の曲率とその微分よりなるたいへん複雑なかたちをもっているが，このうち指数に影響するものはリーマン多様体およびベクトルバンドルの位相的な性質だけを反映する限られた項からなる．この項をスケール変換によっていわば“あぶりだす”のであるが，もともとリーマン多様体の位相的性質は共形変換によって不変な量によって記述されるものであり，スケール変換はもっとも簡単な共形変換であることを考えあわせれば，きわめて自然な方法であるといえる．

7.1　メーラーの公式

指数密度の計算は**調和振動子**（harmonoic oscillator）の場合に帰着させて行う．その場合に必要な調和振動に関するメーラーの公式をこの節で導こう．

実数直線上の調和振動

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 \tag{7.1}$$

を考える．関数 $p_t(x,y)$ でつぎの条件を満たすものを考えよう．各 $t \geq 0$ に対し写像

$$\phi \longrightarrow \phi_t(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x,y)\phi(y)dy \tag{7.2}$$

は $\mathbf{R}$ 上のシュワルツ関数（急減少関数）の空間 $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ で有界で，熱方程式

$$(\partial_t + H)\phi_t(x) = 0 \tag{7.3}$$

を満たし，初期条件

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x,y)\phi(y)dy = \phi(x) \tag{7.4}$$

を満たす．このような解を見いだすために，(7.1) の作用素 Hが微分と積に関して2次であることに注意して，x, y のガウス関数である解をさがす．さらに調和振動は自己共役であるから，解は x, yについて対称でなければならない．そこで解を

$$p_t(x,y) = \exp\left(a_t x^2/2 + b_t xy + a_t y^2/2 + c_t\right) \tag{7.5}$$

の形に求めてみる．熱方程式を適用して $p_t(x,y)$ で割れば

$$\begin{aligned}&\dot{p}_t(x,y) + Hp_t(x,y)\\ &\quad = \left(\dot{a}_t x^2/2 + \dot{b}_t xy + \dot{a}_t y^2/2 + \dot{c}_t - (a_t x + b_t y)^2 - a_t + x^2\right) p_t(x,y)\end{aligned} \tag{7.6}$$

を得る．こうして係数に関するつぎの常微分方程式を考えることに帰着された．

$$\dot{a}_t/2 = a_t^2 - 1 = b_t^2, \quad \dot{c}_t = a_t \tag{7.7}$$

これらの方程式は解

$$\begin{aligned} a_t &= -\coth(2t + C)\\ b_t &= \operatorname{cosech}(2t + C)\\ c_t &= -1/2 \log\sinh(2t + C) + D \end{aligned} \tag{7.8}$$

をもつ．積分定数Cと D の値を決めるために，$p_t(x,y)$ の初期条件を用いて $C = 0$, $D = \log(2\pi)^{-1/2}$を得る．このようにして H のつぎの解が得られる．

$$\begin{aligned}&p_t(x,y)\\ &\quad = (2\pi\sinh 2t)^{-1/2}\exp\left(-\frac{1}{2}((\coth 2t)(x^2+y^2) - 2(\operatorname{cosech} 2t)xy)\right)\end{aligned} \tag{7.9}$$

これをメーラー (Mehler) の公式とよぶ．この公式をおもに $y = 0$ とし，変数変換をしてつぎの形で用いる．

【命題 7.1】 任意の実数 r, f に対し，

$$(4\pi t)^{-1/2}\left(\frac{tr/2}{\sinh(tr/2)}\right)^{1/2}\exp\left(-(tr/2)x^2/4t-tf\right) \tag{7.10}$$

は方程式

$$\left(\partial_t-\frac{d^2}{dx^2}+\frac{r^2x^2}{16}+f\right)p_t(x)=0 \tag{7.11}$$

を満たす．

以上までのことは実数直線上の（数係数）調和振動子について考えたものである．ディラック作用素のラプラシアンに関しては，クリフォード代数および外積代数に係数をもつ調和振動子が現れる．そこで上の議論を実数係数に限らず，より一般の代数に係数をもつ形式的熱方程式に適用できるように一般化する．一般化の指導原理は**解析接続**（analytic continuation）である．

Vを n 次元ユークリッド空間で e_iをその正規直交基底とする．A を $\mathbf{C}$ 上の単位元をもつ代数とする．R が A に係数をもつ $n\times n$ **歪対称**（skew-symmetric）行列のとき，V上の A 値 1 形式 ω を

$$\omega=\frac{1}{4}\sum_{ij}R_{ij}x_jdx_i \tag{7.12}$$

で定義する．作用素

$$\nabla_i=\partial_i+\omega(\partial_i)=\partial_i+\frac{1}{4}\sum_{ij}R_{ij}x_j \tag{7.13}$$

は V上の A 値関数の空間に作用する．

【定義 7.2】 R を $n\times n$ 歪対称行列，Fを $N\times N$ 行列でともに A に係数をもつものとする．R と F に付随する一般化された調和振動とは，つぎの式で定義され V上の $A\otimes End(\mathbf{C}^N)$ 値関数にはたらく微分作用素である．

$$H=-\left(\sum_i\nabla_i^2\right)+F=-\sum_i\left(\partial_i+\frac{1}{4}\sum_j R_{ij}x_j\right)^2+F \tag{7.14}$$

A に係数をもつ $n \times n$ 歪対称行列の空間で定義された A 値関数

$$j_V(R) = \det\left(\frac{e^{R/2} - e^{-R/2}}{R/2}\right) \tag{7.15}$$

を考える．

$j_V(0) = 1$ だから，$j_V^{-1/2}(tR)$ は 0 に十分近い t に対し定義された t の解析関数であり，そのテイラー級数は

$$j_V^{-1/2}(tR) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^k f_k(R) \tag{7.16}$$

である．ここに $f_k(R)$ は行列 R の係数 R_{ij} について次数 $k \geq 1$ の斉次多項式関数である．

同様に $(tR/2)\coth(tR/2)$ は小さい t に対し定義された A に係数をもつ $n \times n$ 対称行列であり，テイラー級数 $1 + \sum_{k=1}^{\infty} t^{2k} c_k R^{2k}$ をもつ．

$x = \sum x_j e_j \in V$ を n 次元列ベクトルと見なし，${}^t x$ をその転置ベクトルとする．対称行列 $(tR/2)\coth(tR/2)$ を係数にもつ V 上の A 値2次形式

$${}^t x((tR/2)\coth(tR/2))x \tag{7.17}$$

は小さい t に対し定義され，

$$\|x\|^2 + \sum\nolimits_{k=1}^{\infty} c_k t^{2k} ({}^t x R^{2k} x) \tag{7.18}$$

の形のテイラー級数をもつ．

【命題 7.3】　小さい t に対し定義される $A \otimes End(\mathbf{C}^N)$ 値核関数

$$\begin{aligned} &p_t(x, R, F) \\ &\quad = (4\pi t)^{-n/2} j_V^{-1/2}(tR) \exp\left(\frac{-1}{4}\, {}^t x((t/2)\coth(tR/2))x\right) \exp(-tF) \end{aligned} \tag{7.19}$$

は熱方程式

$$(\partial_t + H_x)\, p_t(x) = 0 \tag{7.20}$$

の解である．

証明　$dp_t/dt = -Hp_t$ を証明しなければならない．この式の両辺は行列 R の係数

R_{ij}に関して解析的である．ゆえにRが実係数をもつ場合に証明すれば十分である．

Vの適当な正規直交基底を選べば，上の公式の証明はVが2次元で$Re_1 = re_2$, $Re_2 = -re_1$のときに帰着できる．ゆえに

$$H = -\left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right) - \frac{1}{2}r\left(x_2\partial_1 - x_1\partial_2\right) - \left(\frac{1}{4r}\right)^2\left(x_1^2 + x_2^2\right) + F \tag{7.21}$$

とし，

$$\begin{aligned} &p_t(x_1, x_2) \\ &= (4\pi t)^{-1}\frac{tr/2}{\sin(tr/2)}\exp\left(-(tr/2)\cot(tr/2)\|x\|^2/4t\right)\exp(-tF) \end{aligned} \tag{7.22}$$

とする．関数$\|x\|^2$は無限小回転$x_2\partial_1 - x_1\partial_2$で消されるから，$p_t$が熱方程式を満たすことは(7.10)で$r$を$ir$に置き換えてわかる． ■

上の公式を後で適用する場合には，行列R, Fの係数は（微分形式であって）べき零であるから核はすべてのtに対し定義される．

$q_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/4t}$を$V$上のユークリッドラプラス作用素に対する熱方程式の解とする．核$p_t(x, R, F)$は小さいtに対し

$$p_t(x, R, F) \sim q_t(x)\sum_{k=0}^{\infty} t^k\Phi_k(x) \tag{7.23}$$

の形の漸近展開をもつ．ただし$\Phi_0 = 1$である．

7.2 指数密度 (index density)

$\mathcal{E}$を偶数次元リーマン多様体M上のクリフォード加群で，クリフォード接続$\nabla^{\mathcal{E}}$と付随するディラック作用素Dをもつものとする．

$p_t(x, x)$をD^2の熱核の対角集合への制限とする．この節で$Str(p_t(x, x))$の$t \to 0$での漸近展開のt^0の係数を計算する．とくにこれとマッキーン・シンガー公式と合わせれば，ディラック作用素の指数に対する公式が得られる．

最初に断わっておくが，4章4.3節では熱核を$\mathbf{R}_+ \times M \times M$上のバンドル$(\mathcal{E} \otimes |\Omega|^{1/2}) \otimes (\mathcal{E}^* \otimes |\Omega|^{1/2})$の切断として定義してその構成をした．この節では$M$のリーマン密度$|v_M|$によって密度バンドルの自明化をして，表面上は密度をださない．つ

まり本節では熱核を $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}^* = End(\mathcal{E})$ の切断 $p_t(x,y)$ で表して，$p_t(x,y)|v_{Mx}|^{1/2}\otimes|v_{My}|^{1/2}$の密度部分を省略したものとみなす．

7.2.1　正規座標系による表示

熱核 $p_t(x,x)$ はフィルターづけられた代数 $End(\mathcal{E})\cong C(M)\otimes End_{C(M)}(\mathcal{E})$ の切断である．$End(\mathcal{E})$ のフィルターづけは $C(T^*M)$ のフィルターづけと，$End_{C(M)}(\mathcal{E})$ の元を次数0として与えられるものである．

$C_i(M)$ で $C(M)$ の次数が i 以下のクリフォード元からなる部分バンドルを表すことにする．付随する階数づけられた代数のバンドルは $\Lambda T^*M\otimes End_{C(M)}(\mathcal{E})$ である．

$t\to 0$ での熱核の漸近展開を調べるには Mの1点での無限小近傍を考えれば良いので，$x_{(0)}\in M$を固定し $x_{(0)}\in M$のまわりで正規座標系をとって書き表すことにする．

$\varepsilon>0$ を多様体 Mの $x_{(0)}$での単射半径より小さくとり，

$$V = T_{x_{(0)}}M,\qquad E=\mathcal{E}_{x_{(0)}},\qquad U=\{x\in V|\ \|x\|<\varepsilon\} \tag{7.24}$$

とおく．以下この節の残りとつぎの節を通して (7.24) の記号を用いる．

指数写像

$$V\ni x\longrightarrow \exp_{x_{(0)}}x\in M$$

により Uを $x_{(0)}$の Mでの近傍と同一視する．$x\in V$に対する測地線を $x_{(s)}=\exp_{x_{(0)}}sx$ とし，$x_{(1)}=\exp_{x_{(0)}}x$ とする．

ファイバー $\mathcal{E}_{x_{(1)}}$は測地線 $x_{(s)}=\exp_{x_{(0)}}sx$ に沿う平行移動

$$\tau(x_{(0)},x_{(1)}):\mathcal{E}_{x_{(1)}}\longrightarrow\mathcal{E}_{x_{(0)}}$$

により，$E=\mathcal{E}_{x_{(0)}}$と同一視される．このようにしてU上の$\mathcal{E}$ の切断の空間 $\Gamma^\infty(U,\mathcal{E})$ は，U上の E 値 C^∞関数の空間 $C^\infty(V,E)$ と同一視される．

また表象写像による同型 $\sigma: C(V^*)\cong\Lambda V^*$ により，ベクトル空間 $End(E)=C(V^*)\otimes End_{C(V^*)}(E)$ と $\Lambda V^*\otimes End_{C(V^*)}(E)$ の間には同型写像 σ がある．

微分作用素 D は局所自明化により，

$$D = \sum_{\alpha} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha, \qquad a_\alpha(x) \in End(E) \tag{7.25}$$

と書かれる.

この自明化で D^2を書いてみよう.

そのためにはクリフォード作用と接続を正規座標で計算しなければならない. $V = T_{x_{(0)}}M$の正規直交基底 ∂_i を選び, $T^*_{x_{(0)}}M$の双対基底を dx_iとし, $c^i = c(dx_i) \in End(E)$ とおく.

S を V^*のスピノル空間とし, $W = Hom_{C(V^*)}(S, E)$ とする. Wは $E = S \otimes W$, したがって $End(E) = End(S) \otimes End(W) \cong C(V^*) \otimes End(W)$ を満たす係数ベクトル空間である.

∂_iを $T_{x_{(0)}}M$の正規直交基底とする. $x_{(0)}$を始点とする測地線に沿って ∂_i を平行移動して得られる局所正規直交枠を e_iとし, e^iをその双対基底とする.

【補題 7.4】 測地線に沿う平行移動による $\mathcal{E}$ の自明化のもとで, $End(E)$ 値関数 $c(e^i)_x$ は定値自己準同型写像 c^i である.

証明 $\Re$ を V上の動径ベクトル場とする. 測地線に沿う平行移動による $\mathcal{E}$ の自明化で, 共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}}_{\Re}$ は定義により $\Re$ による微分である. 構成から $\nabla_{\Re}e^i = 0$であり, $\nabla^{\mathcal{E}}$はクリフォード接続だから $[\nabla^{\mathcal{E}}, c(e^i)] = c(\nabla e^i)$ である. ゆえに $\Re \cdot c(e^i)_x = 0$ となり, x での余接ベクトル $e^i = (e^i)_x$のクリフォード作用は定値であって c^i に等しい. ■

上の補題からこの自明化でバンドル $End_{C(M)}(\mathcal{E})$ は, Uに制限したときファイバー $End_{C(V)}(E) = End(W)$ をもつ自明なバンドルであることがわかる.

【補題 7.5】 共変微分 $\nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_i}$の $C^\infty(U, E)$ への作用は

$$\nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_i} = \partial_i + \frac{1}{4}\sum_{j;k<l} R_{klij}x_j c^k c^l + \sum_{k<l} f_{ikl}(x)c^k c^l + g_i(x) \tag{7.26}$$

で与えられる. ここに $R_{klij} = (R(\partial_i, \partial_j)\partial_l, \partial_k)_{x_{(0)}}$ は $x_{(0)}$でのリーマン曲率,

$$f_{ikl}(x) = O(\|x\|^2) \in C^\infty(U)$$

$$g_i(x) = O(\|x\|) \in C^\infty(U, End_{C(V^*)}(E)) = \Gamma(U, End(W)) \tag{7.27}$$

は剰余項である．

証明　$F^{\mathcal{E}}$を接続$\nabla^{\mathcal{E}}$の曲率とし，Rを多様体Mのリーマン曲率とすれば，命題6.24から

$$F^{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \sum_{i<j;k<l} (R(\partial_i, \partial_j)e_k, e_l)c^k c^l dx_i \wedge dx_j + F^{\mathcal{E}/S}(\partial_i, \partial_j) dx_i \wedge dx_j \tag{7.28}$$

となる．ここに

$$F^{\mathcal{E}/S}(\partial_i, \partial_j) \in \Gamma(U, End_{C(V^*)}(E)) \cong \Gamma(U, End(W)) \tag{7.29}$$

であり

$$(R(\partial_i, \partial_j)e_k, e_l) \in C^\infty(U) \tag{7.30}$$

である．点$x_{(0)}$で$e_i = \partial_i$だから

$$(R(\partial_i, \partial_j)e_k, e_l)_{x_{(0)}} = -R_{klij} \tag{7.31}$$

である．$\mathcal{E}$の接続形式をωとし，2.3節の公式(2.39) $L(\Re)\omega = \iota(\Re)F^{\mathcal{E}}$を適用して補題が得られる．■

$p_t(x_{(1)}, x_{(0)})$をD^2の熱核とする．この核を$0 \in V$の近傍Uに移し$End(E)$に値をもつものと考え，$x_{(1)} = \exp_{x_{(0)}} x$として

$$\begin{aligned} p(t, x) &= \tau(\exp_{x_{(0)}} x, x_{(0)}) p_t(\exp_{x_{(0)}} x, x_{(0)}) \\ &= \tau(x_{(1)}, x_{(0)}) p_t(x_{(1)}, x_{(0)}) \end{aligned} \tag{7.32}$$

と書く．

$End(E) = C(V^*) \otimes End(W)$は表象写像$\sigma$によって$\Lambda V^* \otimes End(W)$と同一視できるので，$p(t, x)$は$U$上の$\Lambda V^* \otimes End(W)$値関数と見なすことができる．$C(V^*)$は$\Lambda V^*$上に通常のように$c(\alpha) = (\alpha\wedge) - \iota(\alpha)$で作用し，したがって$\Lambda V^* \otimes End(W)$を$C(V^*) \otimes End(W)$加群と考えることができる．

つぎは正規座標系によるリヒネロウィッツ公式である．

【補題 7.6】 L を $C(V^*)\otimes End(W)$ に係数をもつ $U\subset V$ 上の微分作用素で

$$L=-\sum_i\left((\nabla^{\mathcal{E}}_{e_i})^2-\nabla^{\mathcal{E}}_{\nabla_{e_i}e_i}\right)+\frac{1}{4}r_M+\sum_{i<j}F^{\mathcal{E}/S}(e_i,e_j)c^ic^j \tag{7.33}$$

で定義されるものとする．このとき，$\Lambda V^*\otimes End(W)$ 値関数 $p(t,x)$ は微分方程式

$$(\partial_t+L)p(t,x)=0 \tag{7.34}$$

を満たす．

証明 $x_{(1)}=\exp_{x_{(0)}}x$ とおく．核 $p_t(x_{(1)},x_{(0)})\in\mathcal{E}_{x_{(1)}}\otimes\mathcal{E}^*_{x_{(0)}}$ は微分方程式

$$(\partial_t+D^2_{x_{(1)}})p_t(x_{(1)},x_{(0)})=0 \tag{7.35}$$

を満たす．したがって，$\tau(x_{(1)},x_{(0)})p_t(x_{(1)},x_{(0)})\in C^\infty(U,End(E))$ は，$x_{(1)}=\exp_{x_{(0)}}x$ で $x\in V$ の関数と見なして微分方程式

$$(\partial_t+L)\tau(\exp_{x_{(0)}}x,x_{(0)})p_t(\exp_{x_{(0)}}x,x_{(0)})=0 \tag{7.36}$$

を満たす．ここに $End(E)=C(V^*)\otimes End(W)$ は E に左から作用する．表象同型 $End(E)=C(V^*)\otimes End(W)\cong\Lambda V^*\otimes End(W)$ により，E への $C(V^*)\otimes End(W)$ の作用は，$C(V^*)\otimes End(W)$ の $\Lambda V^*\otimes End(W)$ への通常の作用にうつされる．このことと (7.32), (7.36) から (7.34) が従う． ■

7.2.2 スケール変換

指数密度は $x_{(0)}\in M$ に対し $\lim_{t\to 0}Str(p_t(x_{(0)},x_{(0)}))$ を計算することにより得られるのであるが，これには $Str(p_t(x,x))$ を漸近展開したときの t の 0 次の項のみが関係してくる．$p_t(x,x)$ の漸近展開は $t^{-n/2}$ から始まるローラン級数であり，係数は一般に M のリーマン曲率と係数曲率 $F^{\mathcal{E}/S}$ の複雑な式になり，直接計算するのはきわめて困難である．熱核を用いる指数定理の証明においてもっとも大きな障害として指摘されたのがこの計算の困難さであった．

ギルケイ（Gilkey）は曲率の多項式の上への回転群の作用に関する不変式論を用いて，極限値を間接的に求める方法を提示した．この方法によればディラック作用素に限らず，一般の楕円型作用素に対する指数定理が熱核を用いて証明される．

ディラック作用素の場合にはゲツラー（Getzler）のアイデアで，クリフォード加群の超トレースのもつ性質を利用して，**スケール変換** (rescaling) による方法で $\lim_{t\to 0} Str(p_t(x,x))$ がより内在的な形で計算される．

スケール変換の考え方について解説しよう．スケール変換の基本的なアイデアは空間–時間座標のスケール変換に対し，熱核の漸近展開の各項が異なる大きさで変換されることを利用して，漸近展開の1つの項だけを不変にするような変換を考え，その項のみを抽出する手段を見いだすことである．

まずより簡単な場合として，漸近展開のローラン級数の初項（$t^{-n/2}$の項）をスケール変換によって取り出す方法を考えてみよう．

以下この節でも前節 (7.24) の記号を用いる．

Hをベクトルバンドル$\mathcal{E}$で定義された一般化されたラプラス作用素とする．$0 < u \leq 1$ を助変数とし，測地座標 $\exp_{x(0)} x$ で与えられる空間座標 x と時間座標 t のスケール変換

$$t \longrightarrow ut, \qquad x \longrightarrow u^{1/2}x \tag{7.37}$$

を行う．

t は $\|x\|^2$と同じべきでスケール変換されることに注意しよう．これは (7.32) の $p(t,x)$ が満たす熱方程式が，2階の空間微分と1階の時間微分を含むことによっている．

このスケール変換で $p(t,x)$ は

$$p(t,x) \longrightarrow p(u,t,x) = u^{n/2}p(ut, u^{1/2}x) \tag{7.38}$$

と変換される．因子 $u^{n/2}$は熱核が密度であることによる．スケール変換された熱核は初期条件 $\lim_{t\to 0} p(u,t,x) = \delta(x)$（ディラック測度）を満たしている．

- ユークリッド熱核 $q_t(x) = (4\pi t)^{-n/2}e^{-\|x\|^2/4t}$ はスケール変換 (7.38) で不変である

ことに注意しよう．

一般に x の多項式を係数とする t のべき級数 $\Psi(t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} t^i\Psi_i(x)$ のスケール変換を

$$\Psi(u,t,x) = \sum_{i=0}^{\infty} (ut)^i\Psi_i(u^{1/2}x) \tag{7.39}$$

で定義する．これは (t,x) の多項式関数を係数とする $u^{1/2}$ の形式べき級数である．

【命題 7.7】 V 上の $End(E)$ 値多項式 $\Psi_i(x)$ で $\Psi_0(0)=1$ を満たすものがあり，関数 $u\to p(u,t,x)$ は $u\to 0$ で

$$p(u,t,x)\sim q_t(x)\sum_{i=0}^{\infty}(ut)^i\Psi_i(u^{1/2}x) \tag{7.40}$$

の形の $u^{1/2}$ の漸近展開をもつ．この展開は $(0,1)\times U$ のコンパクト部分集合上で (t,x) について一様であり，微分 $u\to\partial_t^k\partial_x^\alpha(p(u,t,x))$ の漸近展開は (7.40) の漸近展開の微分により得られる．

証明 定理 4.25 により関数 $\Phi_i\in C^\infty(U,End(E))$ で $\Phi_0(0)=1$ を満たすものが存在し，任意の $x\in U$ に対し，

$$\left\|p(t,x)-q_t(x)\sum_{i=0}^{N}t^i\Phi_i(x)\right\|\le C(N)t^{N-n/2} \tag{7.41}$$

を満たす．評価 $\left|x^ke^{-x^2/4t}\right|\le C_kt^{k/2}$ を用いて，$\Phi_i(x)$ をその次数 $2(N-i)$ までのテイラー展開 $\Psi_i(x)$ で置き換える．

$$\left\|p(t,x)-q_t(x)\sum_{i=0}^{N}t^i\Psi_i(x)\right\|\le C(N)t^{N-n/2} \tag{7.42}$$

このようにして $(0,1)\times U$ のコンパクト部分集合上の (t,x) と $0<u\le 1$ について

$$\left\|p(u,t,x)-q_t(x)\sum_{i=0}^{N}(ut)^i\Psi_i(u^{1/2}x)\right\|\le C(N)u^N \tag{7.43}$$

が得られ，これは関数 $u\to p(u,t,x)$ の条件を満たす漸近展開を与える．$p(u,t,x)$ の微分についても同様の議論でよい． ■

命題 7.7 から $u\to 0$ での $p(u,1,x)$ の極限を求めれば，もとの熱核の漸近展開の初項の $t\to 0$ での極限が得られることになる．

指数密度の場合にもどれば，この場合は漸近展開の初項ではなく t の 0 次の項を出さなければならないので，(7.37) のスケール変換は適切でない．指数定理の証明

のおもなアイデアは，ディラック作用素の2乗の熱核が $\Lambda V^* \otimes End_{C(V^*)}(W)$ に値をもつことを利用して，

- 空間–時間座標のスケール変換 (7.37) をΛV^*のスケール変換を含めることによって変更する

ことにある．

$C^\infty(\mathbf{R}_+ \times U, \Lambda V^* \otimes End(W))$ を $\mathbf{R}_+ \times U$ 上の$\Lambda V^* \otimes End_{C(V^*)}(W)$ 値関数の空間とする．この空間につぎのようなスケール変換を導入する．与えられた $0 < u \leq 1$ と $\alpha \in C^\infty(\mathbf{R}_+ \times U, \Lambda V^* \otimes End(W))$ に対し，

$$\alpha(t,x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha(u,x)_{[i]} \tag{7.44}$$

を α の斉次形式成分への分解として，$\delta_u \alpha$ を

$$(\delta_u \alpha)(t,x) = \sum_{i=0}^{n} u^{-i/2} \alpha(ut, u^{1/2}x)_{[i]} \tag{7.45}$$

とおく．

$C^\infty(\mathbf{R}_+ \times U, \Lambda V^* \otimes End(W))$ 上の作用素は，スケール変換 δ_uによってつぎのように変換される．

$$\begin{aligned}
\delta_u \phi(x) \delta_u^{-1} &= \phi(u^{1/2}x), \qquad \phi \in C^\infty(U) \\
\delta_u \partial_t \delta_u^{-1} &= u^{-1} \partial_t \\
\delta_u \partial_i \delta_u^{-1} &= u^{-1/2} \partial_i \\
\delta_u (\alpha \wedge) \delta_u^{-1} &= u^{-1/2} (\alpha \wedge), \qquad \alpha \in V^* \\
\delta_u \iota(\alpha) \delta_u^{-1} &= u^{1/2} \iota(\alpha)
\end{aligned} \tag{7.46}$$

これから $C^\infty(\mathbf{R}_+ \times U, \Lambda V^* \otimes End_{C(V^*)}(E))$ 上の微分作用素の代数をフィルターづけることができる．

【定義 7.8】 $C^\infty(\mathbf{R}_+ \times U, \Lambda V^* \otimes End_{C(V^*)}(E))$ に作用する微分作用素 D がフィルトレーション次数 m をもつとは

$$\lim_{u \to 0} u^{m/2} \delta_u D \delta_u^{-1} \tag{7.47}$$

が存在することであると定義する．

(7.46) から作用素の次数は

作用素	次数
$P(x)$	$-\deg(P)$
$P(t)$	$-2\deg(P)$
$\partial/\partial x_i$	1
$\partial/\partial t$	2
$e_i \wedge$	1
$\iota(e_i)$	-1

(7.48)

のようになる．ただし $P(x)$,$P(t)$ はそれぞれ x，t の多項式を表す．重要なことは

- リヒネロウィッツ公式から作用素 D^2 は次数 2 をもつ

ことである．

【定義 7.9】 スケール変換された熱核 $r(u,t,x)$ を

$$r(u,t,x) = u^{n/2}(\delta_u p)(t,x) \tag{7.49}$$

で定義する．

このように選ぶ理由は

$$\lim_{u \to 0} r(u, t=1, x=0) = \lim_{u \to 0} \sum_{i=0}^{n} u^{(n-i)/2} p_u(x_{(0)}, x_{(0)})_{[i]} \tag{7.50}$$

となり，われわれの目的にかなうことになるからである．

そこで $\lim_{u \to 0} r(u,t,x)$ を考えるわけであるが，直接調べる代わりにつぎのようにする．

まず $r(u,t,x)$ が u によってパラメーターづけられた微分方程式

$$(\partial_t + u\delta_u L\delta_u^{-1})r(u,t,x) = 0 \tag{7.51}$$

を満たすことに注意する．したがってもし微分作用素と関数の極限

$$\lim_{u\to 0} u\delta_u L\delta_u^{-1}, \qquad \lim_{u\to 0} r(u,t,x) \tag{7.52}$$

がともに存在すれば，極限 $\lim_{u\to 0} r(u,t,x)$ は $u\to 0$ での (7.51) の極限の方程式の解であると考えてよい．ゆえに，さらに極限方程式の解がわかれば，$\lim_{u\to 0} r(u,t,x)$ が求められることになる．

そこでまず $u\to 0$ での $u\delta_u L\delta_u^{-1}$ の極限を調べることにする．

R をべき零係数

$$\mathsf{R}_{ij} = (R_{x_{(0)}}\partial_i, \partial_j) \in \Lambda^2 V^* \tag{7.53}$$

をもった行列とする．ここに $R_{x_{(0)}}$ は M の $x_{(0)}$ でのリーマン曲率であり，ΛV^* に外積で作用する．

同様に F を係数曲率 $F^{\mathcal{E}/S}$ を点 $x_{(0)}$ で値をとって得られる $\Lambda^2 V^* \otimes End(W)$ の元とする．F はやはり外積で $\Lambda V^* \otimes End(W)$ に作用する．

【命題 7.10】 $C^\infty(U, \Lambda V^* \otimes End(W))$ にはたらく微分作用素の族 $L(u) = u\delta_u L\delta_u^{-1}$ は $u\to 0$ で

$$K = -\sum_i \left(\partial_i - \frac{1}{4}\sum_j \mathsf{R}_{ij}x_j\right)^2 + \mathsf{F} \tag{7.54}$$

で与えられる極限 K をもつ．

証明　補題 7.5 から微分作用素 $\nabla^{\mathcal{E},u}_{\partial_i} = u^{1/2}\delta_u \nabla^{\mathcal{E}}_{\partial_i}\delta_u^{-1}$ は

$$\begin{aligned}
&\partial_i + \frac{1}{4}\sum_{j;k<l} R_{klij}x_j((e^k\wedge) - u\iota(e^k))((e^l\wedge) - u\iota(e^l)) \\
&\quad + u^{-1/2}\sum_{k<L} f_{ikl}(u^{1/2}x)((e^k\wedge) - u\iota(e^k))((e^l\wedge) - u\iota(e^l)) \\
&\quad + u^{1/2}g_i(u^{1/2}x)
\end{aligned}$$

に等しい．$f_{ikl}(x)=O(\|x\|^2)$ だから $\nabla^{\mathcal{E},u}_{\partial_i}$ は $u\to 0$ で極限をもち，

$$\partial_i+\frac{1}{4}\sum_{j;k<l}\left(R_{x(0)}\right)_{klij}x_j(e^k\wedge)(e^l\wedge) \tag{7.55}$$

に等しい．曲率の基本的な対称性によって $R_{ijkl}=R_{klij}$ であり，また定義により $\mathsf{R}_{ij}=\sum_{k<l}\left(R_{x(0)}\right)_{jikl}(e^k\wedge)(e^l\wedge)$ であるから，(7.55) は

$$\nabla^{\mathcal{E},0}_{\partial_i}=\partial_i-\frac{1}{4}\sum_j \mathsf{R}_{ij}x_j \tag{7.56}$$

に等しい．

$$\begin{aligned}L_1(u)&=-\sum_i\left(\nabla^{\mathcal{E},u}_{\partial_i}\right)^2\\&\quad+\sum_{i<j}F^{\mathcal{E}/S}(e_i,e_j)(u^{1/2}x)((e^i\wedge)-u\iota(e^i))((e^j\wedge)-u\iota(e^j))\\L_2(u)&=\frac{1}{4}ur_M(u^{1/2}x)+u^{1/2}\sum_i\nabla^{\mathcal{E},u}_{\nabla_{e_i}e_i}\end{aligned} \tag{7.57}$$

とおけば，作用素 $L(u)$ は $L_1(u)+L_2(u)$ に等しい．$L_2(u)$ の第 1 項は，$ur_M(x_0)/4$ と $\lim_{u\to 0}\sum_i\nabla^{\mathcal{E},u}_{\nabla_{e_i}e_i}$ の $u^{1/2}$倍の和であって非特異であるから，明らかに $\lim_{u\to 0}L_2(u)=0$ である．$L_1(u)$ の第 1 項は極限

$$-\sum_i\left(\nabla^{\mathcal{E},0}_{\partial_i}\right)^2=\sum_i\left(\partial_i-\frac{1}{4}\sum_j\mathsf{R}_{ij}x_j\right)^2 \tag{7.58}$$

をもち，第 2 項は $x=0$ で e_i は ∂_i に等しいことから

$$\begin{aligned}\lim_{u\to 0}&\sum_{i<j}F^{\mathcal{E}}(e_i,e_j)(u^{1/2}x)((e^i\wedge)-u\iota(e^i))((e^j\wedge)-u\iota(e^j))\\&=\sum_{i<j}\mathsf{F}(\partial_i,\partial_j)(e^i\wedge)(e^j\wedge)\\&=\mathsf{F}\end{aligned} \tag{7.59}$$

が得られる． ■

命題 7.10 により

$$L(u) = K + O(u^{1/2}) \tag{7.60}$$

である．さらに作用素 $L(0) = K$ は，$n \times n$ 反対称曲率行列 R_{ij} と可換代数 $\Lambda^+ V$ に係数をもつ $N \times N$ 行列 F $(N = \dim W)$ に付随する一般化された調和振動子であることがわかった．結局

- 低次数の作用素の違いを除けば，D^2 は微分形式係数の調和振動子と同一視される

ということになるのである．以上で $\lim_{u\to 0} u\delta_u L\delta_u^{-1}$ の存在がわかった．

つぎに $\lim_{t\to 0} r(u,t,x)$ の存在を示そう．命題 7.7 により導かれる結果を用いて $r(u,t,x)$ が $u \to 0$ で極限をもつことを示そう．つぎの補題を用いる．

【補題 7.11】 $\Lambda V^* \otimes End(W)$ 値多項式 $\gamma_i(t,x)$ が $\mathbf{R} \times V$ 上に存在して，すべての整数 $N > 0$ に対し関数

$$r^N(u,t,x) = q_t(x) \sum_{i=-n}^{2N} u^{i/2} \gamma_i(t,x) \tag{7.61}$$

はつぎの意味で $r(u,t,x)$ を近似する．$N > j + |\alpha|/2$ に対し定数 $C(N,j,\alpha)$ が存在して，$0 < u \le 1$ と $(t,x) \in (0,1) \times U$ に対し，

$$\left\| \partial_t^i \partial_x^\alpha (r(u,t,x) - r^N(u,t,x)) \right\| \le C t^{N-n/2} \tag{7.62}$$

が成り立つ．さらに $\gamma_0(0,0) = 1$ かつ $i \ne 0$ ならば $\gamma_i(0,0) = 0$ が成り立つ．

証明　命題 7.7 により，$\Lambda V^* \otimes End(W)$ 値多項式 $\Psi_i(x)$ で $\Psi_0(0) = 1$ であるものが存在し，

$$\left\| p(t,x) - q_t(x) \sum_{i=0}^{N} t^i \Psi_i(x) \right\| \le C t^{N-n/2} \tag{7.63}$$

が成り立つ．この式の k 次形式成分を取り出せば，

$$\left\| p(t,x)_{[k]} - q_t(x) \sum_{i=0}^{N} t^i \Psi_i(x)_{[k]} \right\| \le C t^{N-n/2} \tag{7.64}$$

を得る．$u \in (0,1)$ によってスケール変換して

$$\left\| r(u,t,x)_{[k]} - u^{-k/2} q_t(x) \sum_{i=0}^{N} (ut)^i \Psi_i(u^{1/2}x)_{[k]} \right\| \le C u^{N-k/2} t^{N-n/2} \tag{7.65}$$

が得られる．このことから，補題の $\gamma_j(t,x)_{[k]}$ として和

$$u^{-k/2} \sum_{i=0}^{(j+k)/2} (ut)^i \Psi_i(u^{1/2}x)_{[k]} \tag{7.66}$$

の中の $u^{j/2}$の係数をとればよいことがわかる．これは $\mathbf{R}_+ \times V$ 上の $\Lambda V^* \otimes End(W)$ 値多項式である．

$\gamma_j(t,x) = \sum_{p=0}^{n} \gamma_j(t,x)_{[k]}$ は $\delta_u \gamma_j = u^{j/2}\gamma_j$を満たす．さらに $j < -k$ に対し，$\gamma_j(t,x)_{[k]} = 0$ であり，ゆえに $j < -n$ に対し $\gamma_j(t,x) = 0$ である．

$(t,x) \in (0,1) \times U$ と $0 < u \le 1$ に対し，

$$\left\| r(u,t,x) - q_t(x) \sum_{i=-n/2}^{2N} u^{i/2} \gamma_i(t,x) \right\| \le C u^N \tag{7.67}$$

が成り立つ．微分についても同様の議論が成り立つ．$\gamma_i(0,0)$ の値は

$$\sum_{i=-n/2}^{\infty} u^{i/2} \gamma_i(0,0) = (\delta_u \Psi)(0,0) = 1 \tag{7.68}$$

からわかる． ■

$L(u) = K + O(u^{1/2})$ から，$r(u,t,x)$ の $u^{1/2}$ のローラン級数

$$r(u,t,x)\ q_t(x) \sum_{i=-n}^{\infty} u^{1/2} \gamma_i(t,x) \tag{7.69}$$

は極をもたない．

$(\partial_t + L(u)) r(u,t,x) = 0$ を $u^{1/2}$のローラン級数に展開して，$r(u,t,x)$ の漸近展開の初項 $u^{-1/2} q_t(x) \gamma_{-l}(t,x)$ は熱方程式

$$(\partial_t + K(x))(q_t(x)\gamma_{-l}(t,x)) = 0 \tag{7.70}$$

を満たすことがわかる．調和振動子の熱方程式の形式解は $\gamma_{-l}(0,0)$ によって決定されるので，前節の結果と $l>0$ に対し $\gamma_{-l}(0,0)=0$ であることにより，γ_{-l} は $l=0$ 以外は恒等的に 0 である．とくに $r(u,t,x)$ の $u^{1/2}$ のローラン級数は極をもたない．

以上で極限 $\lim_{t\to 0} r(u,t,x)$ の存在が証明された．

さらに以上のことから $r(0,t,x)$ の展開の初項，$r(0,t,x)=q_t(x)\gamma_0(t,x)$，は初期条件

$$\gamma_0(0,0)=1 \tag{7.71}$$

を満たす作用素 $L(0)=K$ に対する熱方程式の解である．こうして $r(0,t,x)$ の計算を

- 微分形式係数の調和振動子の熱核の計算に帰着させる

ことができたわけである．したがって，$r(0,t,x)$ を計算するためには，K に対する公式を求めて，7.1 節のメーラー公式を適用すればよい．命題 7.3 を適用してつぎの結果を得る．

【定理 7.12】　極限 $\lim_{u\to 0} r(u,t,x)$ は存在して

$$(4\pi t)^{-n/2}\det{}^{1/2}\left(\frac{t\mathsf{R}/2}{\sinh t\mathsf{R}/2}\right)\exp\left(-\frac{1}{4t}\,{}^t x\left(\frac{t\mathsf{R}}{2}\coth\frac{t\mathsf{R}}{2}\right)x-t\mathsf{F}\right) \tag{7.72}$$

に等しい．ただし ${}^t x$ はベクトル $x\in V$ の転置を表す．

定理 7.12 で $t=1$, $x=0$ とおき，$x_{(0)}\in M$ をあらためて $x\in M$ と書いてつぎの定理を得る．

【定理 7.13】　$p_t(x,x)$ の $p_i\in\Gamma(M,C(M)\otimes End_{C(M)}(\mathcal{E}))$ を係数とする漸近展開

$$p_t(x,x)\sim(4\pi t)^{-n/2}\sum_{i=0}^{\infty}t^i p_i(x) \tag{7.73}$$

を考える．つぎが成り立つ．

(1)　係数 p_i はバンドル $C_{2i}(M)\otimes End_{C(M)}(\mathcal{E})$ の切断である．

(2) $\sigma(p) = \sum_{i=0}^{n/2} \sigma_{2i}(p_i) \in \Omega(M, End_{C(M)}(\mathcal{E}))$ とすれば

$$\sigma(p) = \det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right)\exp(-F^{\mathcal{E}/S}) \tag{7.74}$$

である.

上の公式の $i=0$ の部分はワイルの公式

$$\lim_{t\to 0}(4\pi t)^{n/2} p_t(x,x) = rk(\mathcal{E}) \tag{7.75}$$

にほかならない.

7.2.3 局所指数定理

定理 7.13 から，アティヤ・シンガーの結果を強めた，ディラック作用素に対する局所指数定理が導かれる．その最終的な結果を与えよう．

マッキーン・シンガー公式（定理 6.29）により，すべての $t>0$ に対し，

$$ind(D) = \int_M Str(p_t(x,x))\,|v_M| \tag{7.76}$$

である.

定理 7.13 から D が接続に付随するものであるならば，t が 0 に収束するとき積分関数それ自身が極限をもつことがわかる．実際，元 $a \in C(M)$ の超トレースは，$n = \dim M$ より小さいクリフォードフィルトレーションをもつすべての元に対し 0 になるので，定理 7.13 の (1) から，

$$Str(p_t(x,x)) \sim (4\pi t)^{-n/2} \sum_{i \geq n/2} t^i Str(p_i(x)) \tag{7.77}$$

となり，ゆえに $Str(p_t(x,x))$ の漸近展開は極をもたないことがわかる．さらにマッキーン・シンガー公式の左辺 $ind(D)$ は t によらず，また積分 $\int_M Str(p_j(x))dx$, $j \neq n/2$, は消えるので，

$$ind(D) = (4\pi)^{-n/2} \int_M Str(p_{n/2}(x))\,|v_M| \tag{7.78}$$

が得られる．

$Str(p_{n/2}(x))$ を M の特性形式として表すために，いくつかの記号を導入する．

クリフォード加群 $\mathcal{E}$ を，スピノルバンドル $\mathcal{S}$ と係数バンドル $\mathcal{W}$ を用いて局所的に $\mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ と表せば，(5.99) により，$a \in \Gamma(M, End(\mathcal{W})) \cong \Gamma(M, End_{C(M)}(\mathcal{E}))$ に対し，$\Gamma \in (M, C(M))$ を向き作用素として

$$Str(a) = 2^{-n/2} Str_{\mathcal{E}}(\Gamma a) \tag{7.79}$$

となる．上の分解は一般には局所的にのみ可能でありこれを用いる代わりに，定義 5.38 の相対超トレースを使うことにする．

$a \in \Gamma(M, End_{C(M)}(\mathcal{E}))$ の相対超トレースは

$$Str_{\mathcal{E}/S}(a) = 2^{-n/2} Str_{\mathcal{E}}(\Gamma a) \tag{7.80}$$

である．$a \in \Gamma(M, C(M)), b \in \Gamma(M, End_{C(M)}(\mathcal{E}))$ ならば，切断

$$a \otimes b \in \Gamma(M, C(M) \otimes End_{C(M)}(\mathcal{E})) \cong \Gamma(M, End(\mathcal{E})) \tag{7.81}$$

の各点での超トレースは，ベレジン積分

$$Str_{\mathcal{E}}(a(x) \otimes b(x)) = (-2i)^{n/2} \sigma_n(a(x)) Str_{\mathcal{E}/S}(b(x)) \tag{7.82}$$

に等しい．したがって

$$Str_{\mathcal{E}}(p_{n/2})(x) = (-2i)^{n/2} Str_{\mathcal{E}/S}(\sigma_n(p_{n/2}(x)) \tag{7.83}$$

となる．

前節までの計算はすべて M の1点での正規座標で行われているので，定理 7.13 により，クリフォード接続に付随するディラック作用素の指数に対し，つぎの指数密度に関する定理が得られる．

【定理 7.14】　（**局所指数定理** (local index theorem)）M をコンパクト，向きづけられた偶数次元 n のリーマン多様体，$\mathcal{E}$ を M 上のクリフォード加群で，クリフォード接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ をもつものとし，D を付随するディラック作用素とする．

$p_t(x,x)\,|v_M| \in \Gamma(M, End(\mathcal{E}) \otimes |\Omega|)$ を作用素 D^2 の熱核の対角集合への制限とすれば，$\lim_{t\to 0} Str(p_t(x,x))\,|v_M|$ は存在し，

$$(2\pi i)^{-n/2} \det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right) Str_{\mathcal{E}/S}(\exp(-F^{\mathcal{E}/S})) \tag{7.84}$$

の n 次形式部分をとって得られる Mの体積形式に等しい．

つぎのことは重要である．一般の作用素に対して $\lim_{t\to 0} Str(p_t(x,x))$ が各点で収束すると考える理由は何もなく，実際クリフォード接続に付随するディラック作用素でない作用素に対しては一般的には成り立たない．

上の指数密度に関する公式を積分して，特性類を用いたアティヤ・シンガー指数公式を定式化しよう．

まず$\widehat{A}$ 形式を定義する．

【定義 7.15】 リーマン多様体 Mの$\widehat{A}$ 形式 $\widehat{A}(M) \in \Omega^{4\bullet}(M)$ を，Mのレビ–チビタ接続の曲率形式 R を用いて

$$\widehat{A}(M) = \det{}^{1/2}\left(\frac{iR/4\pi}{\sinh iR/4\pi}\right) \tag{7.85}$$

と定義する．

$\widehat{A}(M)$ は，3.5 節の母関数 $\widehat{A}$ に対応する，ベクトルバンドル TMの特性形式であり，つぎのように Mのポントリャーギン類の多項式である．

$$\widehat{A}(M) = 1 - \frac{1}{24}p_1(M) + \frac{1}{5760}(7p_1^2(M) - 4p_2(M)) + \cdots \tag{7.86}$$

つぎにクリフォードバンドルの相対チャーン指標を定義する．

【定義 7.16】 $Str_{\mathcal{E}/S} : \Gamma(M, End_{C(M)}(\mathcal{E})) \to C^\infty(M)$ を線形写像

$$Str_{\mathcal{E}/S} : \Omega(M, End_{C(M)}(\mathcal{E})) \longrightarrow \Omega(M) \tag{7.87}$$

に拡張し，$\mathcal{E}$ のクリフォード接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ に対し，超バンドル $\mathcal{E}$ の相対チャーン指

標形式を

$$ch(\mathcal{E}/S) = Str_{\mathcal{E}/S}(\exp(iF^{\mathcal{E}/S}/2\pi)) \tag{7.88}$$

によって定義する.

相対チャーン指標 $ch(\mathcal{E}/S)$ は M の閉微分形式である．この微分形式のコホモロジー類はクリフォード接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ のとり方によらず，これも $ch(\mathcal{E}/S)$ と表すことにする.

とくにクリフォード加群 $\mathcal{E}$ が $\mathcal{E} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ で，$\nabla^{\mathcal{E}}$ が $\mathcal{S}$ のレビ–チビタ接続と $\mathcal{W}$ の曲率 $F^{\mathcal{W}}$ をもつ接続のテンソル積であれば，$ch(\mathcal{E}/S) = Str_{\mathcal{W}}(\exp(iF^{\mathcal{W}}/2\pi))$ は係数バンドル $\mathcal{W}$ のチャーン指標である.

【定理 7.17】 （**アティヤ・シンガー**（Atiyah-Singer)） D をコンパクト，向きづけられた偶数次元 n のリーマン多様体 M 上の，クリフォード加群 $\mathcal{E}$ で定義されたディラック作用素とする．D の指数はコホモロジー公式

$$ind(D) = \int_M \widehat{A}(M)ch(\mathcal{E}/S) \tag{7.89}$$

で与えられる.

定理 7.14 の式 (7.84) の最初の因子 $(2\pi i)^{-n/2}$ は，$\widehat{A}(M)$ と $ch(\mathcal{E}/S)$ の定義の中に取り込まれていることに注意されたい.

8

幾何学におけるディラック作用素

幾何学での古典的な1階微分作用素は，自然なクリフォード接続をもつクリフォード加群のディラック作用素になっている．この節でもっとも重要ないくつかの例をあげよう．

8.1　ガウス・ボンネ・チャーン定理

古典的なガウス・ボンネ (Gauss-Bonnet) の定理は，リーマン計量をもつ閉曲面上のガウス曲率積分が曲面のオイラー標数に等しくなるというものである．チャーンによってこの定理は高次元に拡張された．これをディラック作用素の指数定理の例として見てみよう．

$2n$ 次元リーマン多様体 M 上の超バンドル $\mathcal{E} = \Lambda T^*M$, $\mathcal{E}^{\pm} = \Lambda^{\pm} T^*M$ を考える．$\alpha \in \Gamma(M, T^*M)$ と $\beta \in \Omega(M)$ に対し

$$c(\alpha)\beta = \alpha \wedge \beta - \iota(\alpha)\beta \tag{8.1}$$

とおいて $\mathcal{E} = \Lambda T^*M$ はクリフォード加群となる．明らかに $\mathcal{E} = \Lambda T^*M$ のレビ–チビタ接続はクリフォード作用と両立する．

$$0 \longrightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \Omega^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \tag{8.2}$$

をドラーム複体とする．

$$d^* : \Omega^\bullet(M) \longrightarrow \Omega^{\bullet-1}(M) \tag{8.3}$$

を外微分 d の共役作用素とする（4.2 節 (4.28)）．

【命題 8.1】 クリフォード加群 $\mathcal{E} = \Lambda T^*M$ のレビ–チビタ接続に対応するディラック作用素は $d + d^*$ である．

証明　∇ をレビ–チビタ接続とすれば命題 2.23 から $d = \wedge \circ \nabla$ である．また命題 4.10 から $d^* = -\iota \circ \nabla$ であり，$d + d^* = (\wedge - \iota) \circ \nabla = c \circ \nabla$ である．■

作用素 $d + d^*$ の平方 $d^*d + d^*d$ をラプラス・ベルトラミ (Laplace-Beltrami) 作用素という．

【定義 8.2】 $d^*d + d^*d$ の核に属する微分形式，つまり $(d^*d + d^*d)\alpha = 0$ を満たす微分形式 α を調和形式とよぶ．

関係式

$$\int_M (\alpha, (dd^* + d^*d)\alpha) = \int_M (d\alpha, d\alpha) + (d^*\alpha, d^*\alpha) \tag{8.4}$$

により，調和形式は $d\alpha = d^*\alpha = 0$ を満たす微分形式といってもよい．

ドラーム (de Rham) の定理により，ドラーム複体 (8.2) のコホモロジー

$$H^i(\Omega^*(M), d) = ker(d_i)/Im(d_{i-1})$$

は M の調和形式のなす空間と同型であり，さらに M の位相的な特異コホモロジー群 $H^i(M, \mathbf{R})$ と同型である．したがってつぎの定理が得られる．

【定理 8.3】 ディラック作用素 $d + d^*$ の指数は

$$Eul(M) = \sum_j (-1)^j \dim H^j(M, \mathbf{R})$$

で定義される M のオイラー数に等しい．

レビ–チビタ接続 $\nabla^{\mathcal{E}}$ をもつクリフォードバンドル $\mathcal{E} = \Lambda T^*M$ に指数定理を適用しよう．そのためには局所的に $\mathcal{E} = \mathcal{S} \otimes \mathcal{W}$ と表して，$F^{\mathcal{E}/\mathcal{S}} = F^{\mathcal{W}}$ を計算しなければならない．

まず M の 1 点で $V = T^*M$ として考えることにする．

$2n$ 次元実ベクトル空間 V に対し，ΛV は (8.1) の作用でクリフォード代数 $C(V)$ の加群である．

$C(V)$ のスピノル表現 S として第 5 章 5.3 節で構成されたものを考える．すなわち V の正の正規直交基底 $(e_i)_{i=1}^{2n}$ に対し，$P=\{e_{2j-1}-ie_{2j}\}$ として偏極 $V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}=P\otimes\bar{P}$ を定める．$S=\Lambda P$ であり，$S^{\pm}=\Lambda^{\pm}P$ が S の $\mathbf{Z}_2$ 階級づけを与える．

命題 5.29 により同型

$$S^*\otimes S\cong End(S)\cong C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\stackrel{\sigma}{\longrightarrow}\Lambda V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C} \tag{8.5}$$

がある．この同型において $C(V)_{\mathbf{R}}\otimes\mathbf{C}$ の $S^*\otimes S$ への作用は，

$$\begin{aligned}(S^*\otimes S)\otimes(C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}) &\cong (S^*\otimes S)\otimes(S^*\otimes S)\\ &\cong S^*\otimes(S\otimes S^*)\otimes S\\ &\longrightarrow (S^*\otimes S)\end{aligned} \tag{8.6}$$

で与えられる．ただし最後の写像は，テンソル積の第 2，第 3 成分のあいだの縮約を表す．これは $C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ を行列環 $End(S)$ と同一視したとき，行列の右からの積による作用である．また，$End_{C(V)}(\Lambda V)\cong End(S^*)$ となる．

ΛV の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけ

$$\Lambda V=\Lambda^+V+\Lambda^-V$$

$\Lambda^+V=\sum\Lambda^{2j}V$, $\Lambda^-V=\sum\Lambda^{2j+1}V$, からもたらされる S^* の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけは

$$S^*=(S^*)^+\oplus(S^*)^-,\qquad (S^*)^{\pm}=(S^{\pm})^* \tag{8.7}$$

で与えられる．対応する $End_{C(V)}(\Lambda V)$ の超トレースを $Str_{\Lambda V/S}$ とする．

以上によりドラーム複体の場合，係数バンドル $\mathcal{W}$ を (8.7) の階数づけをもつ超バンドル $S^*=S^{*+}\oplus S^{*-}$ と同一視することができる

$End_{C(V)}(\Lambda V)$ の生成元はつぎのようにして得られる．

$End(\Lambda V)$ のつぎの元を考えよう．

$$c_i=(e_i\wedge)-\iota(e_i),\qquad b_i=(e_i\wedge)+\iota(e_i) \tag{8.8}$$

このように定義された c_i と b_i の間には関係式

$$[c_i,c_j]=-2\delta_{ij},\qquad [b_i,b_j]=2\delta_{ij},\qquad [c_i,b_j]=0 \tag{8.9}$$

が成り立つ.

c_1は ΛV への $C(V)$ 作用の生成元となるので (8.9) の最後の式により，b_iは $C(V)$ 作用と可換であり，$b_i \in End_{C(V)}(\Lambda V)$ である．(8.9) と次元の計算から $End_{C(V)}(\Lambda V)$ は b_iによって生成されることがわかる.

表象写像 σ によって $C^2(V)$ と$\Lambda^2(V)$ を同一視する．また $a \in \Lambda^2 V = C^2(V)$ に対し，$\tau(a) \in so(V)$ を第5章命題 5.18 で与えられた元とし,

$$j_V(a) = \det\left(\frac{\sinh(\tau(a)/2)}{\tau(a)/2}\right)$$

とおく（第5章定義 5.23).

【補題 8.4】 $a = \sum_{i<j} a_{ij} e_i e_j \in \Lambda^2 V$に対し，$b(a) = \sum_{i<j} a_{ij} b_i b_j \in End_{C(V)}(\Lambda V)$ と定義する．このとき，つぎの式が成り立つ.

$$Str_{\Lambda V/S}(e^{b(a)}) = (-2i)^{n/2} j_V(a)^{1/2} Pf_\Lambda(a) \tag{8.10}$$

証明　定義により

$$Str_{\Lambda V/S}(e^{b(a)}) = (-2i)^{-1} Str_{\Lambda V}(c_1 \cdots c_n e^{b(a)}) \tag{8.11}$$

である．したがって $\dim V = 2$ で $a = \theta e_1 e_2$ のとき補題を証明すれば十分である．このとき

$$b(a) = \theta b_1 b_2, \qquad \exp(\theta b_1 b_2) = \cos\theta + (\sin\theta) b_1 b_2 \tag{8.12}$$

である．容易に確かめられるように，$Str_{\Lambda V}(c_1 c_2) = 0$ かつ $Str_{\Lambda V}(c_1 c_2 b_1 b_2) = -4$ が成り立つから

$$\begin{aligned} Str_{\Lambda V/S}(e^{b(a)}) &= (-2i)^{-1} Str_{\Lambda V}(c_1 c_2 \cos\theta + (\sin\theta) c_1 c_2 b_1 b_2) \\ &= -2i \sin\theta \end{aligned} \tag{8.13}$$

となる．一方 $j_V(\theta e_1 e_2)^{1/2} = \theta^{-1} \sin\theta$ かつ $Pf_\Lambda(\theta e_1 e_2) = \theta$ であるから補題の式が得られる. ■

曲率テンソル $(\nabla^{\mathcal{E}})^2$は

$$\sum_{ij,k<l} R_{ijkl}(e_i \wedge)\iota(e_j) e_k \wedge e_l \tag{8.14}$$

に等しい．これに $(e_i\wedge) = (b_i + c_i)/2$, $\iota(e_i) = (b_i - c_i)/2$ を代入して

$$\begin{aligned}(\nabla^{\mathcal{E}})^2 &= -\frac{1}{4}\sum\nolimits_{ij,k<l} R_{ijkl}(c_i + b_i)(c_j - b_j)e_k \wedge e_l \\ &= -\frac{1}{4}\sum\nolimits_{ij,k<l} R_{ijkl}(c_i c_j - b_i b_j)e_k \wedge e_l \end{aligned} \tag{8.15}$$

となる．ただしここで R_{ijkl} は i,j について反対称であることから

$$\sum\nolimits_{ij} R_{ijkl}(c_i b_j - b_i c_j) = \sum\nolimits_{ij} R_{ijkl}(c_i b_j + c_j b_i) \tag{8.16}$$

が成り立つことを用いた．

この式と $(Re_i, e_j) = -\sum_{k<l} R_{ijkl}e^k \wedge e^l$ から，$(\nabla^{\mathcal{E}})^2 = R^{\mathcal{E}} + F^{\mathcal{E}/S}$ において $R^{\mathcal{E}} = \dfrac{1}{4}\sum_{ij}(Re_i, e_j)c_i c_j$ であり，$F^{\mathcal{E}/S}$ は

$$F^{\mathcal{E}/S} = -\frac{1}{4}\sum_{ij}(Re_i, e_j)b_i b_j \tag{8.17}$$

で与えられることがわかる．

$d + d^*$ の指数の公式に現れる

$$(2\pi i)^{-n/2}\det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right) Str_{\mathcal{E}/S}(\exp(-F^{\mathcal{E}/S})) \tag{8.18}$$

を計算しよう．$e(TM) \in \Omega^n(M)$ を多様体 M のレビ–チビタ接続に付随したオイラー形式とする．

【命題 8.5】　つぎが成り立つ．

$$(2\pi i)^{-n/2}\det{}^{1/2}\left(\frac{R/2}{\sinh(R/2)}\right) Str_{\mathcal{E}/S}(\exp(-F^{\mathcal{E}/S})) = e(TM) \tag{8.19}$$

証明　補題 8.4 から $a = \sum_{i<j} a_{ij}e_i \wedge e_j \in \Lambda^2 M$ のとき

$$j_V(a)^{-1/2} Str_{\mathcal{E}/S}\left(\exp\sum_{ij} a_{ij}b_i b_j\right) = (-2i)^{n/2} Pf_{\Lambda}(-a) \tag{8.20}$$

である．この等式の解析接続によって，同じ公式が 2 形式係数をもつ $\Omega^2(M)$ の元 $a = \frac{1}{2}\sum_{ij}(Re_i, e_j)e_i \wedge e_j$ に対しても成り立つことがわかる．(8.10) と，解析接続

によって $j_V(a)^{-1/2}$ は $\det^{1/2}\left(\dfrac{R/2}{\sinh(R/2)}\right)$ に対応することから，命題が証明される． ■

この結果として定理 8.3 とあわせて

$$Eul(M) = ind(d+d^*) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim(H^i(M)) \tag{8.21}$$

に対する指数公式が得られる．

【定理 8.6】（**ガウス・ボンネ・チャーン**（Gauss-Bonnet-Chern）**の定理**）　向きづけられた偶数次元多様体 M のオイラー数は

$$Eul(M) = \int_M Pf(-R/2\pi) \tag{8.22}$$

で与えられる．

この定理は M が 2 次元多様体のとき古典的なガウス・ボンネの定理

$$Eul(M) = \frac{1}{2\pi}\int_M r_M dx \tag{8.23}$$

となる．

8.2　ヒルツェブルフ符号定理

ドラーム作用素の例の変形として符号作用素が定義される．これはドラーム作用素の例とディラック作用素は同じであるが，ΛT^*M の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけが異なるものである．

【定義 8.7】　V を向きづけられたユークリッドベクトル空間とし，$V\otimes\mathbf{C}$ をその複素化とする．補題 5.26 の**向き作用素**（chirarity operator）$\Gamma\in C(V)\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ のクリフォード加群 $\Lambda V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ への作用を，$\Lambda V\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}$ 上の**ホッジ $*$ 作用素**（Hodge star operator）とよぶ．

向きづけられたn次元リーマン多様体Mの複素化された外積バンドル$\Lambda T^*M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$の各ファイバーにこの作用素を適用してホッジ$*$作用素

$$* : \Lambda^k T^* M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \longrightarrow \Lambda^{n-k} T^* M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \tag{8.24}$$

が得られる.

【命題 8.8】 つぎが成り立つ.

(1) $\alpha \in \Omega^1(M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ ならば, $*^{-1}(\alpha \wedge) * = (-1)^n \iota(\alpha)$

(2) α と β が M 上の k 形式ならば,

$$\int_M \alpha \wedge *\beta = (-1)^{kn+k(k-1)/2} i^p \int_M (\alpha, \beta) dx \tag{8.25}$$

ここに, dx は向きづけられた n 次元リーマン多様体 Mのリーマン体積形式であり, n が偶数のとき $p = n/2$, n が奇数のとき $p = (n+1)/2$ である.

(3) k 次微分形式の空間の上では $d^* = (-1)^{n+1} *^{-1} d*$ である.

証明 (1) e_iを Vの正規直交基底とすれば $\alpha = e_n$としてよく,

$$(e_n \wedge) c(e_1) \cdots c(e_n) = (-1)^n c(e_1) \cdots c(e_{n-1})(e_n \wedge) c(e_n) \tag{8.26}$$

が成り立つ. 一方任意の $v \in V$に対し

$$(v \wedge) c(v) = (v \wedge) \left((v \wedge) - \iota(v) \right) = - \left((v \wedge) - \iota(v) \right) \iota(v)$$

が成り立つので (1) の公式を得る.

(2) $\alpha, \beta \in \Lambda^k V$とする. k についての帰納法により

$$\alpha \wedge *\beta = (-1)^{kn+k(k-1)/2} i^p (\alpha, \beta) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{8.27}$$

を証明する. $k = 0$ に対して $\beta \in \Lambda^0 V = \mathbf{C}$ であり, 定義から

$$* \beta = i^p \beta e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \tag{8.28}$$

である．$\alpha \in \Lambda^k V, \beta \in \Lambda^{k+1} V$ かつ $e \in V$のとき，

$$\begin{aligned}\alpha \wedge e \wedge *\beta &= (-1)^n \alpha \wedge *\iota(e)\beta \\ &= (-1)^{n+kn+k(k-1)/2} i^p (\alpha, \iota(e)\beta) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= (-1)^{n+kn+k(k-1)/2} i^p (e \wedge \alpha, \beta) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \\ &= (-1)^{n+kn+k(k-1)/2} (-1)^k i^p (\alpha \wedge e, \beta) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n \end{aligned} \tag{8.29}$$

となり $k+1$ に対しても正しい．

(3) d^*の定義式に (2) を代入し，ストークス (Stokes) の定理を適用すれば，$\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^{k+1}(M)$ に対し

$$\begin{aligned}\int_M (\alpha, d^*\beta) dx &= \int_M (d\alpha, \beta) dx = (-1)^{(k+1)n+k(k+1)/2} i^{-p} \int_M d\alpha \wedge *\beta \\ &= -(-1)^{k+(k+1)n+k(k+1)/2} i^{-p} \int_M \alpha \wedge d * \beta \\ &= -(-1)^n \int_M (\alpha, *d * \beta) \end{aligned} \tag{8.30}$$

を得る． ■

$n = \dim M$を偶数とする．作用素 $*$ はディラック作用素 $d + d^*$，したがってラプラス・ベルトラミ作用素 $d^*d + d^*d$ と反可換である．$*^2 = 1$ であり，$*$ は $c(v) = (v\wedge) - \iota(v)$ と反可換である．$*\alpha = \alpha$ を満たす微分形式を**自己双対**（self-dual）形式，$*\alpha = -\alpha$を満たす微分形式を**反自己双対**（anti-self-dual）形式とよぶ．

自己双対形式を偶，反自己双対形式を奇として$\Lambda T^*M \otimes \mathbf{C}$ にドラーム複体の場合と異なる $\mathbf{Z}_2$ 階数づけを定義することができるが，これは

$$(\Lambda T^*M \otimes \mathbf{C})^{\pm} = (1 \pm c(\Gamma))(\Lambda T^*M \otimes \mathbf{C}) \tag{8.31}$$

で与えられる．

Mの次元が4の倍数であれば，Γ は実クリフォード代数の元であり，$*$ は実形式の空間に作用する．

命題 8.8 の特別な場合として $n = \dim M$が偶数のとき，α, $\beta \in \Omega^{n/2}(M)$ に対し

$$\int_M \alpha \wedge \beta = \varepsilon_p \int_M (\alpha, *\beta) dx$$

となることがわかる．ただしここに $n = 4k$ のとき $\varepsilon_p = 1$, $n = 4k+2$ のとき $\varepsilon_p = i$ である．$H^{n/2}(M, \mathbf{R})$ の上の $(\alpha, \beta) \to \int_M \alpha \wedge \beta$ により定義される**双一次形式**（bilinear form）は

$$\int_M \alpha \wedge \beta = (-1)^{n/2} \int_M \beta \wedge \alpha \tag{8.32}$$

を満たす．

【定義 8.9】 向きづけられた閉多様体 M の次元が 4 の倍数のとき，二次形式（quadratic form）(8.32) は対称形式（symmetric form）であり，符号数が定義できる．これを M の**符号数**（signature）とよび，$\sigma(M)$ と表す．

$\dim M = 4k$ のとき M の符号数 $\sigma(M)$ はポアンカレ双対定理により，M の $2k$ 次元ホモロジー群 $H_{2k}(M, \mathbf{R})$ の**交叉形式**（intersection form）によって組合せ的に定義できる．ドラームコホモロジー群 $H^{2k}(M, \mathbf{R})$ は $2k$ 次元特異チェイン上の $2k$ 次微分形式の積分をとる写像

$$\begin{aligned} H^{2k}(M, \mathbf{R}) \times H_{2k}(M, \mathbf{R}) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ ([\alpha], [c]) &\longrightarrow \int_c \alpha \end{aligned} \tag{8.33}$$

によって実係数特異ホモロジー群 $H_{2k}(M, \mathbf{R})$ と双対の関係にある．$[\alpha] \in H^{2k}(M, \mathbf{R})$ が与えられたとき，$[\alpha]$ の双対ホモロジー類は，任意の $[\beta] \in H^{2k}(M, \mathbf{R})$ に対し

$$([\beta], [c_\alpha]) = \int_M \alpha \wedge \beta$$

を満たす $[c_\alpha] \in H_{2k}(M, \mathbf{R})$ である．ホモロジー類が部分多様体の表すサイクルで与えられている場合，その双対コホモロジー類が法バンドルのトム形式を用いて構成されることは第 3 章で注意したとおりである．

$[\alpha]$ と $[\beta]$ の双対ホモロジー類 $[c_\alpha]$, $[c_\beta]$ に対し**特異ホモロジー理論**（singular homology theory）を用いてそれらの**交叉数**（intersection number）$[c_\alpha] \cdot [c_\beta] \in \mathbf{R}$ が組合せ的に定義されるが，実は

$$[c_\alpha] \cdot [c_\beta] = \int_M \alpha \wedge \beta \tag{8.34}$$

という関係が成り立つ．したがって $\sigma(M)$ は M の中の $2k$ サイクルの交わり具合に関する不変量であり，とくに $H_{2k}(M,\mathbf{R})$ が $2k$ 次元部分多様体の類によって生成される場合は幾何学的に直感的にとらえられるものである．

【定義 8.10】 M を 4 の倍数の次元をもつ向きづけられたコンパクトリーマン多様体とする．ホッジ $*$ 作用素によって $\mathbf{Z}_2$ 階数づけられたクリフォード代数 $\Lambda T^*M\otimes\mathbf{C}$ 上の作用素 $d+d^*$ を，M の**符号作用素**（signature operator）とよぶ．

この定義からわかるように，符号作用素はドラーム複体の場合と同様に $\Lambda T^*M\otimes\mathbf{C}$ にはたらく微分作用素 $d+d^*$ によって定義される．

符号作用素がドラーム複体の場合と異なるのは，$\Lambda T^*M\otimes\mathbf{C}$ の $\mathbf{Z}_2$ 階数づけである．8.1 節 (8.5) の同型により係数バンドルは S^* であるが，ホッジ $*$ 作用素による $\Lambda T^*M\otimes\mathbf{C}$ の $\mathbf{Z}_2$ の階数づけは (8.31) で与えられる．

(8.31) を (8.5) の同型 $\mathcal{S}^*\otimes\mathcal{S}\cong\Lambda T^*M\otimes\mathbf{C}$ で書き直せば，第 5 章 5.3 節 (5.89) により，

$$(\Lambda T^*M\otimes\mathbf{C})^{\pm}=S^*\otimes S^{\pm}$$

となる．つまり係数バンドルの元はすべて偶で $S^*=(S^*)^+$ である．

対応する相対超トレースを $Tr_{\Lambda V/S}=2^{-n/2}Tr_{\Lambda V}$ で表せば，$Tr_{\Lambda V/S}$ はつぎの補題で与えられる．

【補題 8.11】 c_i, b_i を (8.8) で定義された作用素とする．$a=\sum_{i<j}a_{ij}e_ie_j\in\Lambda^2V$ に対し，$b(a)=\sum_{i<j}a_{ij}b_ib_j\in End_{C(V)}(E)$ と定義する．このとき，つぎの式が成り立つ．

$$Tr_{\Lambda V/S}(e^{b(a)})=2^{n/2}\det(\cosh(\tau(a)/2))^{1/2} \tag{8.35}$$

証明　定義により

$$Str_{\Lambda V/S}(e^{b(a)})=(-2i)^{-1}Str_{\Lambda V}(c_1\cdots c_ne^{b(a)}) \tag{8.36}$$

である．したがって $\dim V=2$ で $a=\theta e_1e_2$ のとき補題を証明すれば十分である．このとき

$$b(a) = \theta b_1 b_2, \qquad \exp(\theta b_1 b_2) = \cos\theta + (\sin\theta) b_1 b_2 \tag{8.37}$$

である．$\det(\cosh_V(\tau(\theta e_1 e_2)/2)^{1/2} = \cos\theta$ であり，$Tr_{\Lambda V}(b_1 b_2) = 0$ だから

$$Tr_{\Lambda V}(e^{\theta b_1 b_2}) = Tr_{\Lambda V}(\cos\theta) + Tr_{\Lambda V}((\sin\theta) b_1 b_2) = 4\cos\theta \tag{8.38}$$

が得られる． ■

【定義 8.12】 特性類 $L(M) \in \Omega^{4\bullet}(M)$ を

$$L(M) = \det{}^{1/2}\left(\frac{iR/2\pi}{\tanh(iR/2\pi)}\right) \tag{8.39}$$

によって定義する．これは**ヒルツェブルフ L 種数**（Hirzebruch L-genus）とよばれる．

L 種数はポントリャーギン類で表される．多様体 Mの接ベクトルバンドルのポントリャーギン類を $p_i(M)$ で表すことにして，

$$L(M) = \sum L_j(p_1(M), \cdots, p_j(M)), \qquad L_j \in \Omega^{4j}(M) \tag{8.40}$$

と書けば，最初の 0 でない数項は

$$\begin{aligned}
L_1 &= \frac{1}{3}p_1 \\
L_2 &= \frac{1}{45}(7p_2 - p_1^2) \\
L_3 &= \frac{1}{3^3 \cdot 5 \cdot 7}(62p_3 - 13p_2p_1 + 2p_1^3) \\
L_4 &= \frac{1}{3^4 \cdot 5^2 \cdot 7}(381p_4 - 71p_3p_1 - 19p_2^2 + 22p_2p_1^2 - 3p_1^4)
\end{aligned} \tag{8.41}$$

となる．

補題 8.11 によって $\widehat{A}(M) Tr_{E/S}(\exp(-F^{E/S})) = 2^{n/2} L(M)$ であり，つぎの結果が得られる．

【定理 8.13】 （**ヒルツェブルフ**（Hirzebruch）**の定理**） Mを向きづけられた 4 の倍数次元をもつリーマン多様体とする．Mの符号数 $\sigma(M)$ は

$$\sigma(M) = \int_M L(M) \tag{8.42}$$

で与えられる．

■ **例 8.1** ■ 2つの2次元球面の直積 $S^2 \times S^2$ の2次元ホモロジー群は，$* \in S^2$ を S^2 の1点としてホモロジー類 $[S^2 \times *]$, $[* \times S^2]$ が生成元となり，交叉形式と符号数は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma = 0 \tag{8.43}$$

である．

また複素射影平面 $\mathbf{CP}^2$ の2次元ホモロジー群は，部分多様体として含まれる複素射影直線 $\mathbf{CP}^1 = S^2$ のホモロジー類が生成元となり，$\mathbf{CP}^1$ の CP^2 内での法バンドルは自明でなく $\mathbf{CP}^1$ の自己交叉数は1となり，したがって交叉形式は $\sigma(\mathbf{CP}^2) = 1$ となる．

これらの多様体の特性類は $S^2 = \mathbf{CP}^1$ とみなして計算すればよく，3.6.2項から

$$p_1(S^2 \times S^2) = 0, \qquad p_1(\mathbf{CP}^2) = 3x^2 \tag{8.44}$$

である．ただし $x \in H^2(\mathbf{CP}^2, \mathbf{Z})$ は2次元整係数コホモロジー群の生成元である．4次元多様体に対しては

$$\sigma(M) = \int_M \frac{1}{3} p_1(M) \tag{8.45}$$

であるから，定理 8.12 が確かめられる．

8.3　スピン多様体上のディラック作用素

$\mathcal{S}$ を偶数次元スピン多様体 M 上のスピノルバンドルとする．$\mathcal{S}$ のレビ–チビタ接続に付随するディラック作用素 D は，すべてのディラック作用素のなかでもっとも基本的な例であり，単にディラック作用素といえば普通はこの作用素のことを指す．

【定義 8.14】　$\mathcal{S}$ の切断で D の核に属するものを**調和スピノル** (harmonic spinor)

とよぶ．

より一般に係数つきスピノルバンドル $\mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ で，クリフォード接続 $\nabla^{\mathcal{W}\otimes\mathcal{S}} = \nabla^{\mathcal{W}} \otimes 1 + 1 \otimes \nabla^{\mathcal{S}}$ をもつものに対し，ディラック作用素 $D_{\mathcal{W}\otimes\mathcal{S}}$ を考えることができる．$F^{\mathcal{W}}$ を $\nabla^{\mathcal{W}}$ の曲率とすれば $\nabla^{\mathcal{W}\otimes\mathcal{S}}$ の係数曲率 $F^{\mathcal{E}/S}$ は $F^{\mathcal{W}}$ に等しく，リヒネロウィッツ公式から

$$D^2_{\mathcal{W}\otimes\mathcal{S}} = \Delta^{\mathcal{W}\otimes\mathcal{S}} + \sum_{i<j} F^{\mathcal{W}}(e_i, e_j)c(e_i)c(e_j) + \frac{r_M}{4} \tag{8.46}$$

となる．とくにスピノルバンドル $\mathcal{S}$ 自身に対しては

$$D^2 = \Delta^{\mathcal{S}} + \frac{r_M}{4} \tag{8.47}$$

である．

リヒネロウィッツはこの公式を用いてつぎの結果を証明した．

【命題 8.15】 M がコンパクトスピン多様体でそのスカラー曲率が非負かつ少なくとも 1 点で正とすれば，スピノルバンドル $\mathcal{S}$ 上のディラック作用素の核は 0 である．とくにその指数は 0 である．

証明　$s \in \Gamma(M, \mathcal{S})$ とすれば，

$$\int_M (D^2 s, s)dx = \int_M \|\nabla s\|^2 \, dx + \frac{1}{4}\int_M r_M \|s\|^2 \, dx \tag{8.48}$$

である．したがって $Ds = 0$ から $\nabla s = 0$ と $r_M s = 0$ が得られ，(s, s) は M 上定数となり $s = 0$ が得られる．■

スピン多様体 M の上では，前節のドラーム作用素と符号作用素は係数つきディラック作用素として書くことができる．実際スピン多様体 M の上ではクリフォード加群の同型

$$\Lambda T^*M \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong C(M) \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \cong End(\mathcal{S}) \cong \mathcal{S}^* \otimes \mathcal{S} \tag{8.49}$$

が M 全体で存在し，ΛT^*M 上のディラック作用素 $d + d^*$ は，スピノルバンドル $\mathcal{S}$

上のディラック作用素をバンドル $\mathcal{S}^*$ によって係数づけたものとして得ることができる.

ΛT^*M 上の2つの異なる $\mathbf{Z}_2$ 階数づけは係数バンドル $\mathcal{S}^*$ の2つの異なる $\mathbf{Z}_2$ 階数づけに対応する：$\mathcal{S}^*$ を次数の偶奇にしたがって $\mathbf{Z}_2$ 階数づければ ΛT^*M の階数づけが得られ，$\mathcal{S}^*$ を階数づけのないバンドルとして扱えば，ホッジ $*$ 作用素からくる階数づけが得られる.

スピン多様体上のスピノルバンドルにはたらくディラック作用素 D の場合は，曲率 $F^{\mathcal{E}/S}=0$ であり，つぎの定理が得られる.

【定理 8.16】

$$ind(D) = \int_M \widehat{A}(M) \tag{8.50}$$

この定理からつぎのことがわかる.

(1) ディラック作用素の指数はスピン構造によらない.

(2) (8.50) の右辺はつねに有理数であるが，整数でなければ M はスピン構造をもたない.

(3) スピン多様体 M が，スカラー曲率 r_M が正であるような計量をもてば，リヒネロウィッツの消滅定理からディラック作用素の指数は0となる.

上記の (2) は位相幾何学で**整数性定理**（integrality theorem）とよばれる一連の定理のひとつである．(8.50) の右辺は指数定理とは独立に，それより以前に特性類の理論において導入されたものであり，位相幾何学的な計算の過程でスピン多様体に対し整数となることが知られていた.

第7章 (7.86) で注意したように，$\widehat{A}$ 種数はポントリャーギン類の有理係数多項式で書かれ，係数の分母はベルヌーイ数に関連した大きな整数になる．ポントリャーギン類が整係数コホモロジー群の元であることを考え合わせると，スピン多様体に対し整数になることは一見不思議な現象であった．スピン多様体に対する指数定理は“なぜそれが整数になるのか”という問への本質的な解答を与えるものであったのである.

$\mathcal{W}$ をエルミート接続をもつエルミートベクトルバンドルとする．またそのエルミート接続の曲率を $F^{\mathcal{W}}$とする．$\mathcal{E} = \mathcal{W} \otimes \mathcal{S}$ を係数つきクリフォード加群とする．$\mathcal{S}$ のレビ–チビタ接続を $\mathcal{W}$ の接続によって係数づけて得られるクリフォード接続に付随する係数つきディラック作用素 $D^{\pm}_{\mathcal{W}}$ の指数公式において，曲率 $F^{\mathcal{E}/\mathcal{S}}$は $F^{\mathcal{W}}$ にほかならない．したがって，つぎの定理が得られる．

【定理 8.17】 Mを偶数次元の向きづけられたスピン多様体とする．$\mathcal{S}$ をスピンバンドルとし，$\mathcal{W}$ を M 上のベクトルバンドルとする．$D_{\mathcal{W}}$を $\Gamma(M, \mathcal{W} \otimes \mathcal{S})$ 上の係数つきディラック作用素とすれば，

$$ind(D_{\mathcal{W}}) = \int_M \widehat{A}(M) ch(\mathcal{W}) \tag{8.51}$$

が成り立つ．

8.4 ケーラー多様体上の $\bar{\partial}$ 作用素

代数幾何学で重要なディラック作用素の例を最後に述べる．

古典的な**リーマン・ロッホ**（Riemann-Roch）**の定理**は，閉リーマン面上の点 P_i で位数 $\leq \nu_i$ の極をもつ有理型関数の空間の次元に関する公式を与えるものである．閉リーマン面の種数を g，$P = \sum \nu_i P_i$ を**因子**（divisor）とすれば，この次元 $l(P)$ は

$$l(P) - i(P) = \deg P - g + 1 \tag{8.52}$$

で与えられる．ここに $\deg P = \sum \nu_i$であり，$i(P)$ は適当な因子 Q についての $l(Q)$ である．P_iを動かすと $l(P)$ は不連続にとぶこともあるが，$l(P) - i(P)$ は一定にとどまる．さらにある条件（たとえば $\deg P > 2g - 2$）のもとで $i(P) = 0$ であり，上の公式は $l(P)$ を与える式になる．

リーマン・ロッホの定理は代数幾何学の基本的な定理のひとつである．この定理を高次元に拡張するための多くの努力がなされたが，1954 年にヒルツェブルフにより最初の成功がもたらされ，1957 年にグロタンディエック（Grothendieck）により純代数的に確立された．指数定理はこれを一般のケーラー多様体に拡張した．

8.4.1 複素多様体

複素多様体上の正則関数とはコーシー・リーマン作用素 $\bar{\partial}$ の解 $\bar{\partial}u = 0$ にほかならず，したがってリーマン・ロッホの問題を楕円型偏微分作用素の指数の問題として定式化することができる．

M を複素多様体とする．Mの接バンドルの複素化は**正則**（holomorphic），**反正則**（anti-holomorphic）接空間とよばれる2つの部分に分解する．

$$TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M \tag{8.53}$$

$T^{1,0}M$, $T^{0,1}M$はそれぞれ複素構造 Jの i, $-i$ 固有空間である．$JX_j = Y_j, JY_j = -X_j$を満たすTMの局所基底 X_j, Y_j $(1 \le j \le n)$ を用いれば，

$$\begin{aligned} T^{1,0}M &:= \{W_j = X_j - iY_j\} \text{ ではられる部分空間} \\ T^{0,1}M &:= \{\bar{W}_j = X_j + iY_j\} \text{ ではられる部分空間} \end{aligned} \tag{8.54}$$

である．

複素多様体 M の**エルミート構造**（Hermitian structure）とは TM の**エルミート計量**（Hermitian metric）のことである．エルミート構造はリーマン構造を定め，したがってレビ–チビタ接続を定める．しかし一般にレビ–チビタ接続は $T^{1,0}M$, $T^{0,1}M$を保存しない．この点については次節で考えよう．

M がエルミート構造をもち，$\mathcal{W}$ が M上のベクトルバンドルならば，**反正則微分形式**（anti-holomorphic differential form）のなすベクトルバンドル $\Lambda(T^{0,1}M)^* \otimes \mathcal{W}$ はつぎの作用でクリフォード加群になる．

$f \in \Gamma(M, T^*M)$ を

$$\begin{aligned} &f = f^{0,1} + f^{1,0} \\ &f^{0,1} \in \Gamma(M, (T^{0,1}M)^*), \ f^{1,0} \in \Gamma(M, (T^{1,0}M)^*) \end{aligned} \tag{8.55}$$

と分解し，$\nu \in \Gamma(M, \Lambda(T^{0,1}M)^* \otimes \mathcal{W})$ への作用を

$$c(f)\nu = \sqrt{2}((f^{0,1}\wedge) - \iota(f^{1,0}))\nu \tag{8.56}$$

と定義する．ただし縮約はエルミート計量によってとる．

$\mathcal{W}$ がエルミートならば，$f^{0,1} = \overline{f^{1,0}}$ であるから

$$(f^{0,1}\wedge) - \iota(f^{1,0})$$

は**歪随伴**（skew-adjoint）であり，したがってクリフォード作用は**自己共役**（self-adjoint）である．

z_j を局所座標系とすれば $T^{1,0}M$ はベクトル ∂_{z_j} ではられ，$T^{0,1}M$ は $\partial_{\bar{z}_j}$ ではられる．$\Omega^{p,q}(M)$ の元は

$$\sum f_{i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q} dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\bar{z}_{j_q} \tag{8.57}$$

の形をもつ．

複素多様体の上では外微分 d は

$$d = \partial + \bar{\partial}$$

と 2 つの部分に分解する．ここに ∂ は (p,q) 形式の次数を $(1,0)$ 上げ，$\bar{\partial}$ は $(0,1)$ だけ上げる．また

$$\partial^2 = \partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = \bar{\partial}^2 = 0$$

である．これらはともに

$$\begin{aligned} \partial(\alpha \wedge \beta) &= \partial\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \partial\beta \\ \bar{\partial}(\alpha \wedge \beta) &= \bar{\partial}\alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \bar{\partial}\beta \end{aligned} \tag{8.58}$$

を満たす．

$\mathcal{W}$ が M 上の複素ベクトルバンドルで接続 ∇ をもつとき，分解 $TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ に対応して，$\nabla = \nabla^{1,0} + \nabla^{0,1}$ と分解し，M 上の微分形式 $\alpha \in \Omega(M)$ と，M 上の $\mathcal{W}$ 値微分形式 $\nu \in \Omega(M, \mathcal{W})$ に対し

$$\begin{aligned} \nabla^{1,0}(\alpha \wedge \nu) &= \partial\alpha \wedge \nu + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \nabla^{1,0}\nu \\ \nabla^{0,1}(\alpha \wedge \nu) &= \bar{\partial}\alpha \wedge \nu + (-1)^{|\alpha|}\alpha \wedge \nabla^{0,1}\nu \end{aligned} \tag{8.59}$$

が成り立つ．

【定義 8.18】　複素多様体 M 上の複素ベクトルバンドル $\mathcal{W}$ に対し，M のある座標近傍系 U_i と同型 $\phi_i : \mathcal{W}|_{U_i} \to U_i \times \mathbf{C}^N$ があり，変換 $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : U_i \cap U_j \to$

$GL(N,\mathbf{C})$ が正則であるものが存在するとき，$\mathcal{W}$ を M上の**正則ベクトルバンドル**（holomorphic vector bundle）とよぶ．

$\mathcal{W}$ が M上の正則ベクトルバンドルであるとき，作用素 $\bar{\partial}:\Omega^{p,q}(M,\mathcal{W})\to\Omega^{p,q+1}(M,\mathcal{W})$ を局所座標を用いて

$$\bar{\partial}=\sum_{i=1}^{n}(d\bar{z}_i\wedge)\frac{\partial}{\partial\bar{z}_i} \tag{8.60}$$

と定義する．正則ベクトルバンドルの接続 ∇ が $\nabla^{0,1}=\bar{\partial}$ を満たすとき，**正則**（holomorphic）であるという．

【命題 8.19】 $\mathcal{W}$ が M上の正則ベクトルバンドルであり，エルミート計量 h をもつとする．このとき，$\mathcal{W}$ の正則な接続で h を保つものが一意に存在する．

証明　∇ が正則でエルミート計量を保つとすれば，$dh(s,t)$ の $(0,1)$ 成分をとって

$$\bar{\partial}h(s,t)=h(\nabla^{0,1}s,t)+h(s,\nabla^{1,0}t) \tag{8.61}$$

を得る．$\nabla^{0,1}=\bar{\partial}$ であるから，この式から $\nabla^{1,0}$が決まる．$\nabla=\nabla^{1,0}+\nabla^{0,1}$が求める接続を与える． ■

【定義 8.20】 命題 8.19 の接続を $\mathcal{W}$ の**標準的な接続**（canonical connection）とよぶ．

∇ が$\mathcal{W}$ の正則接続でエルミート計量 h を保つとする．曲率は $\Lambda^2T^*M\otimes End(\mathcal{W})$ の切断として**歪随伴**（skew-adjoint）であるから$\left(\nabla^{1,0}\right)^2=0$ であり，∇ の曲率は $[\nabla^{1,0},\nabla^{0,1}]$ に等しく，$\Omega^{1,1}(M,End(\mathcal{W}))$ の元となる．

$\mathcal{W}$ のエルミート計量が点 $z\in M$ でエルミート行列 $h(z)$ で与えられているとすれば，対応する接続 ∇ は

$$\nabla=d+h^{-1}\partial h \tag{8.62}$$

と表される．その曲率は $(1,1)$ 形式

$$F_h = h^{-1}\bar{\partial}\partial h - (h^{-1}\bar{\partial}h) \wedge (h^{-1}\partial h) \tag{8.63}$$

で与えられる．

$\mathcal{W}$ が直線束ならば h は正値関数であり，

$$F_h = \bar{\partial}\partial \log h \tag{8.64}$$

となる．また，s が局所座標近傍上の $\mathcal{W}$ の 0 にならない正則切断とすれば，

$$F_h = \bar{\partial}\partial \log\left(\|s\|^2\right) \tag{8.65}$$

である．

8.4.2　ケーラー多様体

Mがエルミート計量 h をもつ複素多様体とすれば，h の実部を TMに制限したものは M のリーマン計量を与え，h の虚部 $\Omega = \Im h$ を TMに制限したものは M の 2 形式を与える．X, Yを Mのベクトル場とすれば，

$$\Omega(X,Y) = \Im h(X,y) = \Im\overline{h(Y,X)} = -\Im h(Y,X) = -\Omega(Y,X) \tag{8.66}$$

である．また J を M の複素構造とすれば，$g(X,Y) = \Omega(JX,Y)$ が成り立つ．

【定義 8.21】　M が**ケーラー**（Kähler）**多様体**であるとは，Ω が閉形式であることである．

【命題 8.22】　複素エルミート多様体 M がケーラーであるための必要十分条件は，そのリーマン構造から決まるレビ–チビタ接続 ∇ が $T^{1,0}M, T^{0,1}M$を保つことである．またこれは $\nabla J = 0$ と同値である．

証明　$(\cdot\,,\cdot) = \Omega(J\cdot,\cdot)$ であることを用いて，

$$\begin{aligned}((\nabla_X J)Y, Z) &= (\nabla_X(JY), Z) + \Omega(\nabla_X Y, Z) \\ &= -X\Omega(Y,Z) + \Omega(\nabla_X Y, Z) + \Omega(Y, \nabla_X Z) \\ &= -(\nabla_X \Omega)(Y,Z)\end{aligned} \tag{8.67}$$

であることがわかる．レビ–チビタ接続はトーションをもたないので，上の式の右辺を X, Y, Z について**交代化**（anti-symmetrize）したものは，$d\Omega(X, Y, Z)$ に一致する．したがって $\nabla J = 0$ ならば $d\Omega = 0$ となる．

正則座標系 z_jをとれば，第2章のレビ–チビタ接続の公式（2.71）から

$$
\begin{aligned}
&2(\nabla_{\partial_{z_j}}\partial_{z_k}, \partial_{z_l}) = 0 \\
&2(\nabla_{\partial_{\bar{z}_j}}\partial_{z_k}, \partial_{z_l}) = \partial_{z_k}(\partial_{z_l}, \partial_{\bar{z}_j}) - \partial_{z_l}(\partial_{\bar{z}_j}, \partial_{z_k}) = id\Omega(\partial_{z_k}, \partial_{z_l}, \partial_{\bar{z}_j}) \\
&2(\nabla_{\partial_{\bar{z}_j}}\partial_{z_k}, \partial_{\bar{z}_l}) = \partial_{\bar{z}_j}(\partial_{z_k}, \partial_{\bar{z}_l}) - \partial_{\bar{z}_l}(\partial_{\bar{z}_j}, \partial_{z_k}) = id\Omega(\partial_{\bar{z}_j}, \partial_{z_k}, \partial_{\bar{z}_l})
\end{aligned} \tag{8.68}
$$

である．したがって $d\Omega = 0$ ならばレビ–チビタ接続は $T^{1,0}M$を保ち，$T^{1,0}M$上に標準的な正則共変微分を誘導する． ■

【命題 8.23】 $\mathcal{W}$ をケーラー多様体 M上のエルミート計量をもつ正則ベクトルバンドルとする．$\mathcal{W}$ の標準接続とレビ–チビタ接続のテンソル積は，クリフォード加群 $\Lambda(T^{0,1}M)^* \otimes \mathcal{W}$ のクリフォード接続であり，対応するディラック作用素は$\sqrt{2}(\bar{\partial} + \bar{\partial}^*)$ に等しい．

証明　分解 $TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ がレビ–チビタ接続により保たれるので，レビ–チビタ接続はクリフォード接続である．Z_jを $T^{1,0}M$の**局所枠**（local frame）とし，$Z^j \in (T^{1,0}M)^*$を**双対枠**（dual frame）とすれば

$$
d = \sum_j (Z^j \wedge)\nabla_{Z_j} + (\bar{Z}^j \wedge)\nabla_{\bar{Z}_j} \tag{8.69}
$$

である．したがって

$$
\bar{\partial} = \sum_j (\bar{Z}^j \wedge)\nabla_{\bar{Z}_j} \tag{8.70}
$$

が成り立つ．

開集合 $U \subset M$で $\mathcal{W}$ の正則自明化 $\mathcal{W}|_U = U \times \mathbf{C}^N$を選べば，作用素 $\bar{\partial}_{\mathcal{W}}$ は $\Omega(U, \mathbf{C}^N)$ 上の作用素 $\bar{\partial}$ と同一視できる．一方 ∇ は $\Lambda(T^{0,1}M)^*$のレビ–チビタ接続と $\mathcal{W}$ の正則接続のテンソル積だから，作用素

$$\sum_j (\bar{Z}^j \wedge)\nabla_{Z_j} \tag{8.71}$$

は U での正則自明化のもとで $\bar{\partial}$ と一致し，ゆえに $\bar{\partial}_{\mathcal{W}}$ と一致する．

最後に

$$\bar{\partial}^* = -\sum_j \iota(Z^j)\nabla_{Z_j} \tag{8.72}$$

をいう．任意に固定した $\beta_q \in \Omega^{p,q}(M,\mathcal{W})$ と $\beta_{q+1} \in \Omega^{p,q+1}(M,\mathcal{W})$ に対し，α を M 上の 1 形式で

$$\alpha(X) = (\beta_q, \iota(X^{0,1})\beta_{q+1}) \tag{8.73}$$

を満たすものとして定義する．∇ は分解 $TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$ を保つので，2 形式 $\nabla\alpha$ の $TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ のエルミート計量による縮約 $Tr(\nabla\alpha)$ は

$$Tr(\nabla\alpha) = \sum_j \bar{Z}^j \alpha(\bar{Z}^j) - \alpha(\nabla_{\bar{Z}^j}\bar{Z}^j) \tag{8.74}$$

に等しい．ここに Z_j は $T^{1,0}M$ のエルミート計量に関する正規直交基底である．α の定義式 (8.73) から

$$\left(\left(\sum_j (\bar{Z}^j \wedge)\nabla_{\bar{Z}_j}\right)\beta_q\ ,\ \beta_{q+1}\right)_x = -\left(\beta_q\ ,\ \left(\sum_j \iota(Z^j)\nabla_{Z_j}\right)\beta_{q+1}\right)_x + Tr(\nabla\alpha)_x \tag{8.75}$$

が得られる．最後の項は M 上で積分して消え，$\bar{\partial}^*$ についての求める式を得る．ゆえに $\sqrt{2}(\bar{\partial}+\bar{\partial}^*) = c \circ \nabla$ である． ■

8.4.3 ドルボール複体

【定義 8.24】 複素多様体 M 上の複体

$$0 \longrightarrow \Omega^{0,0}(M,\mathcal{W}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,1}(M,\mathcal{W}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \Omega^{0,2}(M,\mathcal{W}) \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \tag{8.76}$$

を**ドルボール複体** (Dolbeault complex) とよび，この複体のコホモロジーを正則ベクトルバンドル $\mathcal{W}$ の**ドルボールコホモロジー** (Dolbeault cohomology) と

よぶ.

ドルボール (Dolbeault) の定理によってこれは**層**（sheaf）係数コホモロジー群 $H^\bullet(M, O(\mathcal{W}))$ に等しい．ホッジ（Hodge）の定理により，このコホモロジーは $\Omega^{0,i}(M, \mathcal{W})$ の上のラプラス・ベルトラミ作用素の核で実現できる.

【定理 8.25】 クリフォード加群 $\Lambda(T^{0,1}M)^* \otimes \mathcal{W}$ 上のディラック作用素 $D = \sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*)$ に対し，$ker\, D$ は自然な仕方で層係数コホモロジー群 $H^\bullet(M, O(\mathcal{W}))$ に同型である.

【系 8.26】 クリフォード加群 $\Lambda(T^{0,1}M)^* \otimes \mathcal{W}$ 上のディラック作用素 $\sqrt{2}(\bar\partial + \bar\partial^*)$ の指数は正則ベクトルバンドル $\mathcal{W}$ のオイラー数に等しい.

$$ind(\bar\partial + \bar\partial^*) = Eul(\mathcal{W}) = \sum (-1)^i \dim(H^i(M, O(\mathcal{W}))) \tag{8.77}$$

ケーラー多様体上の作用素 $\bar\partial + \bar\partial^*$の 2 乗に対するリヒネロウィッツ公式を求めよう．これはボホナー（Bochner）・小平公式ともよばれる．$\Omega^{0,\bullet}(M, \mathcal{W})$ 上の一般化ラプラシアン$\Delta^{0,\bullet}$を

$$\int_M (\Delta^{0,\bullet} s, s) dx = \int_M (\nabla^{0,1} s, \nabla^{0,1} s) dx \tag{8.78}$$

で定義する.

【補題 8.27】 M のエルミート計量に対し Z_jを $T^{1,0}M$の局所正規直交枠とすれば,

$$\Delta^{0,\bullet} = -\sum_i (\nabla_{Z_i} \nabla_{\bar Z_i} - \nabla_{\nabla_{Z_i} \bar Z_i}) \tag{8.79}$$

が成り立つ.

証明　(1,0) 形式 $\alpha(X) = (\nabla_{X^{1,0}} s, s)$ を導入する．$T^{1,0}M$ はレビ–チビタ接続で保たれるので

$$Tr(\nabla\alpha) = -\sum_i \bar{Z}_i\alpha(Z_i) - \alpha(\nabla_{\bar{Z}_i} Z_i) \tag{8.80}$$

が成り立つ．ゆえに

$$\left(-\sum_i (\nabla_{Z_i}\nabla_{\bar{Z}_i} - \nabla_{\nabla_{Z_i}\bar{Z}_i})s, s\right)_x = (\nabla^{0,1}s, \nabla^{0,1}s)_x - Tr(\nabla\alpha)_x \tag{8.81}$$

となり，M上で積分して補題が得られる． ■

ケーラー多様体M上の正則直線バンドル $K = \Lambda^n(T^{1,0}M)^*$を M の標準直線バンドルとよぶ．レビ–チビタ切断に関する $K^* = \Lambda^n(T^{1,0}M)$ の曲率は $(1,1)$ 形式 $\sum(RZ_i, \bar{Z}_i)$ である．ここに R は M のリーマン曲率である．

【命題 8.28】 （ボホナー・小平）$\mathcal{W}$ をケーラー多様体 M 上のエルミート正則ベクトルバンドルとする．局所正則座標系で

$$\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} = \Delta^{0,\bullet} + \sum_{ij}(d\bar{z}_i\wedge)\iota(dz_j)F^{\mathcal{W}\otimes K^*}(\partial_{z_j}, \partial_{\bar{z}_i}) \tag{8.82}$$

である．

証明 証明はリヒネロウィッツ公式と同様である．$\bar{\partial} = \sum(d\bar{z}_i\wedge)\nabla_{\partial/\partial\bar{z}_i}$, $\bar{\partial}^* = -\sum\iota(dz_i)\nabla_{\partial/\partial z_i}$と書き，$R^+$を$\Lambda(T^{0,1}M)^*$の曲率とすれば

$$\bar{\partial}\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial} = \Delta^{0,\bullet} + \sum_{ij}(d\bar{z}_i\wedge)\iota(dz_j)(R^+(\partial_{z_j}, \partial_{\bar{z}_i}) + F^{\mathcal{W}}(\partial_{z_j}, \partial_{\bar{z}_i})) \tag{8.83}$$

である．ゆえに

$$\sum_{ij}(d\bar{z}_i\wedge)\iota(dz_j)R^+(\partial_{z_j}, \partial_{\bar{z}_i}) = \sum_{ij}(d\bar{z}_i\wedge)\iota(dz_j)F^{K^*}(\partial_{z_j}, \partial_{\bar{z}_i}) \tag{8.84}$$

を示せばよい．左辺は

$$\begin{aligned}&\sum_{ijkl}(\bar{Z}_i^*\wedge)\iota(Z_j^*)(\bar{Z}_l^*\wedge)\iota(Z_k^*)(R(Z_j, \bar{Z}_i)Z_k,\ \bar{Z}_l)\\ &= \sum_{ijk}(\bar{Z}_i^*\wedge)\iota(Z_k^*)(R(Z_j, \bar{Z}_i)Z_k,\ \bar{Z}_j)\end{aligned} \tag{8.85}$$

に等しい．レビ–チビタ接続がトーションをもたないことを用いて

$$R(Z_j, \bar{Z}_i)Z_k + R(Z_k, Z_j)\bar{Z}_i + R(\bar{Z}_i, Z_k)Z_j = 0 \tag{8.86}$$

が得られ，$R(Z_k, Z_j) = 0$ から

$$R(Z_j, \bar{Z}_i)Z_k = R(Z_k, \bar{Z}_i) \tag{8.87}$$

がわかる．ゆえに

$$\sum_{ijk} (\bar{Z}_i^* \wedge)\iota(Z_k^*)(R(Z_j, \bar{Z}_i)Z_k\ ,\ \bar{Z}_j) = \sum_{ik} (\bar{Z}_i^* \wedge)\iota(Z_k^*)F^{K^*}(Z_k, \bar{Z}_i) \tag{8.88}$$

となり定理が証明される．■

この公式から重要な**消滅定理**（vanishing theorem）が導かれる．$\mathcal{L}$ を曲率 $F = \sum F_{ij} dz_i \wedge d\bar{z}_j$ をもつエルミート直線バンドルとする．$T^{1,0}M$上のエルミート形式

$$v \longrightarrow F(v, \bar{v}) \tag{8.89}$$

が正ならば$\mathcal{L}$は正であるという．この正条件は$\mathcal{L}$の**大域的な正則切断**（global holomorphic section）の存在に関係している．たとえば s が $\mathcal{L}$ の大域的な正則切断ならば $|s|^2$が最大をとる M の点 x があり，$F_x = \bar{\partial}\partial \log |s|^2$は $T_x^{1,0}M$上正となる．

【命題 8.29】 つぎが成り立つ．

(1) $\mathcal{L}$ をコンパクトケーラー多様体 M上の $\mathcal{L} \otimes K^*$が正であるエルミート正則直線バンドルとすれば

$$H^i(M, O(\mathcal{L})) = 0, \qquad i > 0 \tag{8.90}$$

である．

(2) $\mathcal{L}$ を M上の正のエルミート正則直線バンドル，$\mathcal{W}$ を M上の正則ベクトルバンドルとすれば，十分大きい m に対し

$$H^i(M, O(\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{W})) = 0, \qquad i > 0 \tag{8.91}$$

である．

証明　(1) $\mathcal{L}\otimes K^*$の曲率を $F^{\mathcal{L}\otimes K^*} = \sum F_{ij}^{\mathcal{L}\otimes K^*} dz_i \wedge d\bar z_j$で表し，$\Lambda^i(T^{0,1}M)^*$の自己同型 $\sum_{ij}(d\bar z_i\wedge)\iota(dz_j)F_{ij}^{\mathcal{L}\otimes K^*}$を $\lambda(F^{\mathcal{L}\otimes K^*})$ で表す．ボホナー・小平の公式から

$$\int_M \left((\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial)\alpha, \alpha\right) = \int_M \left(\nabla^{0,1}\alpha, \nabla^{0,1}\alpha\right) + \int_M \left(\lambda(F^{\mathcal{L}\otimes K^*})\alpha, \alpha\right) \quad (8.92)$$

となる．右辺は $i>0$ かつ $\alpha \neq 0$ のとき正である．したがって条件 $\bar\partial\alpha = 0$ と $\bar\partial^*\alpha = 0$ から $\alpha = 0$ が従う．

(2)　バンドル $\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{W}$ に対しボホナー・小平の公式は

$$\bar\partial\bar\partial^* + \bar\partial^*\bar\partial = \Delta_m^{0,\bullet} + m\lambda(F^{\mathcal{L}}) + f \quad (8.93)$$

を与える．ただし f は m に依存しない他の曲率項を表す．十分大きい m に対し $m\lambda(F^{\mathcal{L}})$ は他の曲率項を抑え (2) が従う．　■

8.4.4　リーマン・ロッホ・ヒルツェブルフの定理

命題 8.29 の結果の重要性は，それから大きい m に対し

$$\dim H^0(M, O(\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{W})) = Eul(\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{W}) \quad (8.94)$$

となることが導かれることである．$Eul(\mathcal{L}^m \otimes \mathcal{W})$ は以下に述べるように指数定理の特別な場合であるリーマン・ロッホ・ヒルツェブルフの定理からわかる．

Mをケーラー多様体とし，クリフォード加群 $\mathcal{E} = \Lambda(T^{0,1}M)^*$を考える．$\nabla^{\mathcal{E}}$をレビ–チビタ接続から誘導されるこのクリフォード加群のクリフォード接続とする．

曲率 $F^{\mathcal{E}/S}$を計算しよう．リーマン曲率 R を 2 次微分形式係数の行列と考えて，曲率作用素 $(\nabla^{\mathcal{E}})^2$を

$$\sum_{kl}(Rw_k, \bar w_l)(\bar w^l\wedge)\iota(w^k) \quad (8.95)$$

と書く．ここに w_kは $T^{1,0}M$の基底，w^kはその双対基底である．

一方，命題 6.24 の $End(\mathcal{E})$ 値 2 形式 $R^{\mathcal{E}}$ は

$$\frac14\sum_{kl}(Rw_k, \bar w_l)c(w^k)c(\bar w^l) + \frac14\sum_{kl}(R\bar w_l, w_k)c(\bar w^l)c(w^k) \quad (8.96)$$

に等しい．したがって w_k が正規直交基底ならば

$$(\nabla^{\mathcal{E}})^2 = R^{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}\sum_k (Rw_k, \bar{w}_k)$$
$$= R^{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}Tr_{T^{1,0}M}(R^+) \tag{8.97}$$

となる．これは5.3節補題5.39の計算と同じである．

以上のことは6.3.1項の $Spin^c$ 構造を用いれば，見通しのよいものとなる．第6章で述べたように複素多様体はつねに $Spin^c$ 構造をもつが，とくに標準的な $Spin^c$ 構造として $T^{1,0}M$の第1チャーン類 $c_1(M)$ に対応するものをとることができる（定理6.18参照）．

$c_1(M)$ に対応する複素直線バンドルは $\det T^{1,0}M = \Lambda^n T^{1,0}M$である．したがって定理6.18のすぐ後に注意したように，M上に$\mathcal{S}\otimes\det^{1/2}T^{1,0}M$で表される $Spin^c$ 構造がある．5.3節のベクトル空間の複素構造を用いたスピン表現の構成から，同型

$$\Lambda(T^{0,1}M)^* \cong \mathcal{S}\otimes\det{}^{1/2}T^{1,0}M \tag{8.98}$$

があることがわかる．このことから(8.97)は明らかであろう．

より一般に$\mathcal{W}$ を正則エルミートバンドルとする．$\nabla^{\mathcal{E}}$を，$\Lambda^{0,\bullet}T^*M$のレビチビタ接続を$\mathcal{W}$ の標準接続で係数づけて得られる，$\Lambda^{0,\bullet}T^*M\otimes\mathcal{W}$上のクリフォード接続とする．このとき R^+を $T^{1,0}M$の曲率 $F^{\mathcal{W}}$を，$\mathcal{W}$ の曲率とすれば

$$F^{\mathcal{E}/S} = \frac{1}{2}Tr_{T^{1,0}M}(R^+) + F^{\mathcal{W}} \tag{8.99}$$

となる．

【定義 8.30】 ケーラー多様体 M の**トッド種数**（Todd genus）$Td(M)$ を，R^+を$T^{1,0}M$の曲率として

$$Td(M) = \det\left(\frac{-iR^+/2\pi}{e^{-iR^+/2\pi}-1}\right)$$
$$= \det\left(\frac{iR^+/2\pi}{e^{iR^+/4\pi}-e^{-iR^+/4\pi}}\right)\exp(Tr(iR^+/4\pi)) \tag{8.100}$$

と定義する．

トッド種数は Mのチャーン類の有理係数多項式であり

$$Td(M) = \sum T_j(c_1(M), \cdots, c_j(M)), \qquad T_j \in \Omega^{2j}(M) \tag{8.101}$$

と書けば,

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{1}{2}c_1, \\ T_2 &= \frac{1}{12}(c_1^2 + c_2), \\ T_3 &= \frac{1}{24}c_1c_2, \\ T_4 &= \frac{1}{720}(-c_4 + c_3c_1 + 3c_2^2 + 4c_2c_1^2 - c_1^4) \end{aligned} \tag{8.102}$$

となる.

$TM \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} = T^{1,0}M \oplus T^{0,1}M$であるから

$$\hat{A}(M) = \det\left(\frac{iR^+/2\pi}{e^{iR^+/4\pi} - e^{-iR^+/4\pi}}\right) \tag{8.103}$$

が得られ,

$$\hat{A}(M)Tr_{\mathcal{E}/S}(\exp(iF^{\mathcal{E}/S}/2\pi)) = Td(M)Tr(\exp(iF^{\mathcal{W}}/2\pi)) \tag{8.104}$$

となる.

以上でわれわれはつぎの定理を得る.これは**射影的代数多様体**(projective algebraic variety)に対しヒルツェブルフにより,また一般の場合にはアティヤとシンガーにより証明されたものである.

【定理 8.31】 ケーラー多様体 M上の正則ベクトルバンドル $\mathcal{W}$ のオイラー数は

$$Eul(\mathcal{W}) = \int_M Td(M)ch(\mathcal{W}) \tag{8.105}$$

で与えられる.

例として M がリーマン面の場合を取りあげよう.$R^+ \in \Omega^2(M, \mathbf{C})$ を Mの曲率とする.$\mathcal{L}$ を M上の正則直線バンドルで曲率 $F \in \Omega^2(M, \mathbf{C})$ をもつものとする.

$Td(M) = 1 + iR^+/4\pi$, $ch(\mathcal{L}) = 1 + iF/2\pi$であり，古典的なリーマン・ロッホの定理が得られる．

$$ind(\bar{\partial}_{\mathcal{L}}) = \dim H^0(M, \mathcal{L}) - \dim H^1(M.\mathcal{L}) \\ = \frac{i}{4\pi}\int_M (R^+ + 2F) \tag{8.106}$$

$\mathcal{L} = \mathbf{C}$ が自明な直線バンドルならば

$$\dim H^0(M) - \dim H^1(M) = 1 - g = \frac{i}{4\pi}\int_M R^+ \tag{8.107}$$

となる．ここに $g = \dim H^{1,0}(M) = \dim H^{0,1}(M) = \frac{1}{2}\dim H^1(M)$ は Mの種数（genus）を表す．直線バンドル $\mathcal{L}$ の次数 $\deg(\mathcal{L}) \in \mathbf{Z}$ を

$$\deg(\mathcal{L}) = \frac{i}{2\pi}\int_M F \tag{8.108}$$

で定義すれば，リーマン・ロッホの定理はその古典的な形

$$Eul(\mathcal{L}) = 1 - g + \deg(\mathcal{L}) \tag{8.109}$$

をとる．

あとがき

指数定理に関連する参考文献をあげる．まずアティヤ・シンガー（とアティヤ・シーガル）の論文を紹介する．

[1] M.F.Atiyah and I.M.Singer: The index of elliptic operators I. *Ann.Math*, **87**, 484-530(1968)

[2] M.F.Atiyah and G.B.Segal: The index of elliptic operators II. *Ann.Math*, **87**, 531-545(1968)

[3] M.F.Atiyah and I.M.Singer: The index of elliptic operators III. *Ann.Math*, **87**, 546-604(1968)

[4] M.F.Atiyah and I.M.Singer: The index of elliptic operators IV. *Ann.Math*, **93**, 119-138(1971)

[5] M.F.Atiyah and I.M.Singer: The index of elliptic operators V. *Ann.Math*, **93**, 139-149(1971)

[1] は指数定理の証明，[2] は**同変コホモロジー論**（equivariant cohomology）との関連を扱い，[3] は位相幾何学その他への応用を扱っている．[1] から [3] は単独の楕円型作用素についてのものであるが，[4],[5] は楕円型作用素の**族**（family）の指数定理に関するものである．

これらと以下にあげるアティヤの論文はすべてオックスフォードの Clarendon Press から出版されているアティヤ全集

[1] M.F.Atiyah: Collected works,Clarendon Press,Oxford (1988)

の中に収められている．またこの全集のなかにあるアティヤの解説は，指数定理の証明にいたる道筋が語られていてたいへん興味深い．

上にあげた論文の証明は，解析と代数的位相幾何学の枠組みの中で行われているが，熱核と**不変式論**（Invariant Theory）による証明はつぎにあげる論文 [1] で出された．

[1] M.F.Atiyah,R.Bott and V.K.Patodi: On the heat equation and the index theorem. *Invent.Math*, **19**, 279-330 (1973).

つぎに指数定理に関連する単行本をあげる．

[1] J.Roe: Elliptic operators,topology and asymptotic methods,Pitman Res. Notes in Math.Series 179,Longman Scientific and Technical,Harlow (1988).

[2] P.B.Gilkey: Invariance Theory,the Heat Equation,and the Atiyah-Singer Index Theorem,second edition. CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo(1994)

[3] N.Berline,E.Getzler and M.Vergne: Heat Kernels and Dirac Operators, Grundlehren der mathematische Wissenschaften,p.298,Springer-Verlag (1992)

[1] はコンパクトにまとまって読みやすい．ギルケイの本 [2] は，熱核と不変式論を用いて，指数定理を一般の楕円型作用素について証明している．

近年**ゲージ**（gauge）理論や**モジュライ**（moduli）理論などで，ディラック作用素の族を扱うことが多くなっている．多様体でパラメトライズされたディラック作用素の族の指数は，**指数バンドル**（index bundle）とよばれるベクトルバンドルを定義し，その性質を調べることが重要になっている．とくにこの方面は**場の量子論**（quantum field theory）の**アノマリー**（anomaly）**現象**と深く関連して理論物理と数学との接点になっており，それだけに大変興味深い事柄が次々と発見されている分野である．[3] はディラック作用素の**族の指数定理**（family index theorem）を扱ったほとんど唯一の成書である．

以下章ごとに関連する文献をあげる．

第1章

指数定理の位相幾何学的証明での中心概念は K 理論である．K 理論についてはアティヤの解説がある．

[1] M.F.Atiyah: K-theory, Benjamin, NewYork(1967)

擬微分作用素については

[1] 熊之郷　準: 擬微分作用素，岩波書店 (1974)

を見られたい．

第2章

微分幾何学一般については

[1] S.Kobayasi and K.Nomizu: Foundations of Differential Geometry, J.Wiley and Sons, New York, London(1963)

また位相幾何学一般については

[1] 服部晶夫: 位相幾何学，岩波基礎数学選書，岩波書店 (1991)
[2] 小島定吉: トポロジー入門，21 世紀の数学 第7巻，共立出版 (1998)

などがある．

第3章

特性類，微分形式およびドラームコホモロジー理論についてはつぎの本がある．とくに [2] はドラームコホモロジー論のきわめてすぐれた解説書である．

[1] J.W.Milnor and J.D.Stasheff: Characteristic classes, Annals of Mathematics Study 76, Princeton(1965)
[2] R.Bott and L.Tu: Differential forms in algebraic topology, Graduate Texts in Math.82, Springer-Verlag, Berlin, NewYork (1982)

[3] 森田茂之: 微分形式の幾何学，基礎数学講座，岩波書店 (1996)

トム形式についてはマタイ・キュレンの論文を参照されたい.

[1] V.Mathai and D.Quillen: Superconnections,Thom classes and equivariant differential forms. *Topology*, **25**, 85-110 (1986)

第 4 章

多様体上のラプラシアンの熱核の解析に関する先駆的論文は

[1] S.Minakshisundaram and A.Pleijel: Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds. *Canad.J.Math*, **1**, 242-256 (1949)

である．またリーマン幾何学への応用については

[1] M.Berger,P.Gauduchon and E.Mazet: Le spectre d'une veriete riemannienne,Lecture Notes in Mathermatics 194,Springer-Verlag, Berlin, New York(1971)

を見られたい.

自己共役作用素などの関数解析に関する事柄は

[1] 新井朝雄: ヒルベルト空間と量子力学，21 世紀の数学 第 16 巻，共立出版 (1997)

などがある.

第 5 章

クリフォード代数については論文

[1] M.F.Atiyah,R.Bott and A.Shapiro: Clifford modules. *Topology*, **3**, 3-38 (1964)

を見るのがよい.

第6章

スピン構造に関連してスティーフェル・ホイットニー類については先に第3章の文献にあげた [1]Milnor, Stascheff: Characteristic classes を参照されたい.

第7章

熱核のスケール変換のアイデアはつぎの論文による.

[1] E.Getzler: Pseudodifferential operators on supermanifolds and the index theorem. *Comm.Math.Phys.*, **92**, 163-178 (1983)

第8章

ガウス・ボンネの定理の高次元への一般化については [1] がある. ヒルツェブルフの本 [2] は, 学位論文を単行本として出版したもので, 指数定理の誕生に大きな影響を与えたものである. 母関数による特性類の種数の定義とその性質, 整数性定理などについての事柄が解説されている. 符号定理については, ヒルツェブルフ自身によって発見に至る経緯をこめたかたちで [3] に書かれている.

[1] S.S.Chern: A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds. *Ann.Math.*, **45**, 741-752 (1944)

[2] F.Hirzebruch: Topological methods in algebraic geometry, Grundlehren der mathematische Wissenschaften,p.131,Springer-Verlag, Berlin, New York (1966)

[3] F.Hirzebruch: The signature theorem:reminiscences and recreation. Prospects in mathematics, Annals of Mathematics Study 70, Princeton (1971)

補足

本書では扱わなかったが, 境界のある多様体上のディラック作用素の指数定理は, やはりゲージ理論などで奇数次元多様体の不変量と関連して活発に研究されている. 論文は

[1] M.F.Atiyah,V.K.Patodi and I.M.Singer: Spectral asymmetry and Riemannian geometry, I, *Math.Proc.Camb.Phil.Soc*, **77**, 43-69 (1975)

つぎにあげる単行本は，ともに**境界値問題**（boundary value problem）に関する解析の専門家によるものであるが，[1] はとくに幾何学専攻の研究者への配慮が行き届いている．

[1] B.Booss-Bavnmbek and K.P.Wojciechowski: Elliptic Boundary Problems for Dirac Operators, Birkhäuser (1993)

[2] R.B.Melrose: The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem,Research Notes in Mathematics, vol. 4, A K Peters, Wellesley, Massachusetts (1993)

索　　引

著者略歴

よし　だ　とも　よし
吉　田　朋　好

1971年　京都大学大学院理学研究科修士課程修了
現　在　東京工業大学大学院理工学研究科教授
　　　　理学博士

共立講座 21世紀の数学
第22巻（全27巻）
ディラック作用素の指数定理

1998年11月25日　初版1刷発行

著　者　吉田朋好　
発行者　南條光章
発行所　**共立出版株式会社**
東京都文京区小日向4-6-19
電話　03-3947-2511（代表）
郵便番号　112-8700
振替口座　00110-2-57035

印　刷　啓文堂
製　本　中條製本工場

社団法人
自然科学書協会
会員

Printed in Japan

検印廃止
NDC 414,415
ISBN 4-320-01574-6